TECHE
UDINE

MANOSCRITTI

FONDO PRINCIPALE

Manoscritto n. **P_MSS_1524_I**

Nel Fondo Principale sono confluiti la maggior parte dei lasciti manoscritti pervenuti alla Biblioteca Civica «Vincenzo Joppi» nel corso del tempo: si tratta perciò di un fondo composito nel quale è possibile trovare manoscritti di argomento liturgico, scientifico, giuridico, botanico e altro.

Collocazione:

Biblioteca Civica "Vincenzo Joppi", Udine
https://www.techeudine.it/fondo-principale
https://www.sbhu.it/

1524

INSERZIONI ALLA GAZZETTA

COMMISSARIATO ...

...ALIA - 30 luglio 1883 3289

Dell' Algebra

Ternion. 1.

Elementi d'Algebra

Definizioni.

1. L'Algebra è una specie di Aritmetica universale.

2. Prima di spiegare i fatti metodi si dee notare che qualunque questione è possibile, o impossibile. Possibile, come se si cerchi, se il sei sia numero pari, impossibile se cerchisi, se tra sia pari la di lui metà.

3. Quando è possibile la questione possiamo considerarla sotto tre diversi aspetti. Imperocchè, allora essi risponde o quantità positiva, o negativa, o zero.

Così se si cerchi la facoltà di Pietro possono darsi tre casi, o che abbia, o che debba. ovvero che non abbia nè debba cosa alcuna. Nel primo caso la facoltà di Pietro è positiva, negativa nel secondo, e nel terzo zero, ovvero privativa.

4. Le quantità positive si esprimono col segno +, ed è segno di addizione; così a+b indica la somma delle quantità a, b, e leggesi a più b.

Le quantità negative si esprimono col segno —, ed è segno di sottrazione. Così a — b, indica la differenza delle quantità a, b, e leggesi a _meno_ b.

Il segno = esprime _l'uguale_. Così a = b denota che a uguaglia b.

Il segno > significa _maggiore_ la posizione contraria < _minore_. Così a > b denota che a è maggiore di b; ma a < b esprime che a è minore di b.

Il segno ∞ esprime l'infinito. Così a = ∞ indica che a è uguale all'infinito matematico.

5. Se alla quantità letterale si prefige qualche numero, dicesi questo _coefficiente_ della stessa quantità. Così nell'espressione 2a, il 2 n'è il coefficiente, il qual numero indica che la quantità a si prende due volte

Che però passa gran divario tra l'espressione 2a, ed a^2; imperocchè, se

a vale 5, 2a varrà 10; ma a^2 ovvero aa equivale al prodotto di 5 in se stesso, cioè a 25; il numero poi in tal' modo soprascritto alla lettera dicesi indice o esponente di essa quantità.

6. La quantità letterale sola dicesi semplice, incomplessa, ovvero Monomio, come a, ab, −bc. Quando due si congiungono col segno +, ovvero −, si dice Binomio, come a+b, ovvero c−f; Quando tre si congiungono dicesi Trinomio, come a+b−2df. Universalmente, quando due o più si congiungono co' i detti segni, la quantità si appella Complessa, o Polinomio.

7. Si dicono Simili, o della medesima specie quelle quantità che sono espresse per le medesime lettere, e in numero uguali come a, 2a, 7a, ec. altrimenti sono dissimili, come a, b, ovvero a, aa, ec.

Lezione I.

Del primo calculo Algebraico

Capo I.

Assioma.

Quantità positiva con quantità negativa uguale fa zero. Così $a-a$, $b-b$, $4-4$ danno zero.

Problema I.

Aggiungere quantità letterali.

I. Si scriva una quantità dopo l'altra coi propri segni.

II. Più termini della stessa specie si riducano ad un solo.

Esempi.

Quantità d'aggiungere	a b	$2a$ a	$-3b$ $4b$	$2a$ $-2a$
Somme prime	$a+b$	$2a+a$	$-3b+4b$	$2a-2a$
Somme ridotte	$a+b$	$3a$	b	0

Altro Esempio

$-2a$ $3a$	$3b$ $-5b$	$7c$ $4c$	$-2b$ $2b$	$-3f$ $-5f$
$-2a+3a$	$3b-5b$	$7c+4c$	$-2b+2b$	$-3f-5f$
a	$-2b$	$11c$	0	$-8f$

Altro Esempio

a	$5a$	$7b$	$7b$
$2a$	$-4a$	8	$-2b$
$-b$	$2b$	c	$-5b$
$a+2a-b$	$5a-4a+2b$	$7b+8+c$	$7b-2b-5b$
$3a-b$	$a+2b$	$7b+8+c$	0

Se le date quantità sieno polinomie, sarà lo stesso metodo. Esempio.

Sieno d'aggiungere $2a-b+4c$ più $3a-2b$, $-2a-3b-c+f$

Sarà la somma prima.

$2a-b+4c+3a-2b-2a-3b-c+f$

E la somma ridotta

$3a-6b+3c+f$

Problema II.

Sottrarre quantità letterali.

I. Scrivasi una quantità dopo l'altra, ma nella sottraenda si scambi il segno.

II. Più termini della medesima specie si riducano ad un solo.

Esempio

Minuende	a	$2a$	$3b$	$-3c$	am
Sottraende	b	$2a$	$4b$	$-4c$	$-am$
Differ. prime	$a-b$	$2a-2a$	$3b-4b$	$-3c+4c$	$am+am$
Differ. ridotte	$a-b$	0	$-b$	c	$2am$

Altro

Da	$-a$	$-2c$	$3b$	7	$-4b$
Sottrarre	a	c	-4	-4	$4b$
Differ. prime	$-a-a$	$-2c-c$	$3b+4$	$7+4$	$-4b-4b$
Diff. ridotte	$-2a$	$-3c$	$3b+4$	11	$-8b$

Lo stesso metodo sarà nei polinomj.

Da $4a-2b+c$ sottrarre $3a+3b+c-f$

Differenza prima $4a-2b+c-3a-3b-c+f$.

Differenza ridotta $a-5b+f$

Problema III.

Moltiplicare quantità letterali

La moltiplicazione si esprime col segno $\times$, ovvero col punto (.) fra le quantità date. Così $a\times b$, ovvero $a.b$ esprime il prodotto da a moltiplicato in b. Oppure senz'alcun segno congiunte le lettere fra loro, il che è anco più usitato. Così $a\times b = a.b = ab$.

Importa poi il conoscere qual segno debba prefiggersi al prodotto. Laonde sono da distinguersi quattro casi. I. Quando si moltiplica quantità positiva per quantità parimenti positiva; II. Quando positivo per negativo. III. Quando negativo per positivo. IV. Quando negativo per negativo.

E poichè moltiplicare ~~positivo per positivo,~~ ~~è lo stesso~~ una quantità per l'altra è lo stesso che ripetterla alquante volte, è chiaro che se la quantità positiva alquante volte positivamente si prenda, si produrrà positivo. Ma se la positiva alquante volte si neghi, si produca negativo. Parimenti, se il negativo alquante volte si affermi, si produca negativo. Che se il negativo alquante volte si neghi, egl'è lo stesso che che affermare il negativo, perciò si produrà quantità positiva.

Dalle quali cose seguono le regole

I. Positivo per positivo dà +

II. Positivo per negativo dà —

III. Negativo per positivo dà —

IV. Negativo per negativo dà +

E per restringerle a due universali si conchiuderà che

+ per +, ovvero — per — dà +

+ per —, ovvero — per + dà —

Caso I.

Moltiplicare monomio per monomio

Moltiplicandi	a	− 2a	3b	− 4cm
Moltiplicanti	b	a	− 2b	− 2c
Prodotti	ab	− 2aa	− 6bb	8ccm

I. Si moltiplichino i segni giusto le regole precedenti.
II. Si moltiplichino i coefficienti
III. Si moltiplichino le lettere, e il prodotto si scriva dopo il prod.° de' coefficienti.

Altro Esempio

am	−3a	7	−4c	−3fm
−2b	4	−8	−4c	−4m
Prodotti −2abm	−12a	−56	16cc	12fmm

Caso II.

Polinomio per Monomio

Polinomio moltiplicando	a + 2b − c
Monomio moltiplicante	3a
Prodotto	3aa + 6ab − 3ac

Si moltiplichi ciascun termine del pollinomio pel dato monomio, incominciando da sinistra a destra, e i prodotti particolari, cioè i termini quindi risultanti si congiungano co' i convenienti segni

Altro Esempio

4a − c + 2b − 7
−2f

Prodotto −8af − 2cf − 4bf + 14f

Caso III.

Polinomio per Polinomio

Si moltiplichi ciascun termine del moltiplicante in tutto il moltiplicando da sinistra a destra, e la somma de' prodotti parziali sarà il totale prodotto che si cerca.

Esempio

Il° moltiplicando	$a + b$
Il° moltiplicante	$a + b$
Prod: I.	$aa + ab$
Prod: II	$ab + bb$
Prod: totale	$aa + 2ab + bb$

Altro Esempio

Molt.°	$a + b$
Molt.te	$a - b$
	$aa + ab$
	$- ab - bb$
Prodotto cercato	$aa - bb$

Altro

Molt.°	$a - 2b + c$
Molt.te	$-a + c$
	$-aa + 2ab - ac$
	$+ ac - 2bc + cc$
Prodotto	$-aa + 2ab - 2bc + cc$

Altro

$$
\begin{array}{r}
a - 2b + c - 2f \\
a + b - 3 \\
\hline
aa - 2ab + ac - 2af \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
ab - 2bb + bc - 2bf \qquad\qquad\qquad \\
- 3a + 6b - 3c + 6f \\
\hline
\end{array}
$$

Prodotto $aa - ab + ac - 2af - 2bb + bc - 2bf - 3a + 6b - 3c + 6f$.

Problema IV.

Dividere quantità letterali.

La divisione delle lettere si esprime con due punti interposti tra il dividendo, e il divisore. Così $a:b$ esprime il quoziente che risulta dividendo a per b. Si esprime anco colla linea divisoria come nelle frazioni. Così $a:b = \frac{a}{b}$

Caso I.

Dividere monomio per monomio.

I. Si dividano i segni giusto le regole della moltiplicazione

II. I coefficienti, e pongasi il loro quoto dopo il segno

III. Le lettere, cancellando quelle che sono comuni sì al dividendo sì al divisore, e il loro quoto, cioè le lettere rimanenti si scrivono alla destra del coefficiente trovato.

Esempi

Dividendi	bb	aa	−2aa	−4aa	m
Divisori	b	−a	a	−aa	m
Quoti primi	$\frac{bb}{b}$	$\frac{aa}{-a}$	$-\frac{2aa}{a}$	$-\frac{4aa}{-aa}$	$\frac{m}{m}$
Quoti ridotti	$\frac{b}{b}$ b	−a	−2a	4	$\frac{1}{1}$

Altro

	2aab	−8aa	−am	12b	−aabb
	ab	4a	−am	−4b	−ab
Q.ti ridotti	2a	−2a	$\frac{1}{1}$	−3	ab

Caso II.

Polinomio per monomio

Si divida da sinistra a destra un termine dopo l'altro, congiungendo i quoti parziali coi convenienti segni.

Esempio

Polinomio dividendo 12aab + 8ba − 16aab
Monomio dividente 4ab
Quoziente cercato 3a + 2 − 4a

Caso III.

Polinomio per Polinomio

~~Ciascun uno del pollinomio moltiplicante dividente~~

1. Si divida il primo termine del polinomio dividendo pel primo dei divisore, o qualunque altro più atto a dividersi per lettere comuni

II. Il quoto parziale si moltiplichi per tutto il divisore.

III. Il prodotto, scambiati prima i segni sottraggasi dal dividendo

IV. Dal residuo, ed altri termini rimasti si formi un' nuovo membro, e si ripetta la divisione nello stesso modo.

Esempio

Coll.^{ne} divid.^o	$aa + 2ab + bb$	Quoziente $a + b$
Coll.^{ne} div.^{te}	$a + b$	
Prod.^o	$aa + ab$	
	$0 + ab + bb$	
divisore	$a + b$	
	$ab + bb$	
	0	

Altro

Coll.^o divid.^o	$aa - bb$	Quoto $a - b$
Coll.^o div.^{te}	$a + b$	
prod.^o	$aa + ab$	
	$0 - ab - bb$	
	$a + b$	
	$-ab - bb$	
	0	

Altro

Coll.° divis.° $-aa+2ab-2bc+cc$ (Quo.te $a+c-2b$

Coll.° div.re $-a+c$

$$-aa+ac$$

$$-ac+2ab-2bc+cc$$

$$-a+c$$

~~$+ac-cc$~~

$$-ac+cc$$

$$0+2ab-2bc$$

$$-a+c$$

$$2ab-2bc$$

$$0$$

Altro

Col. divid.° $ab-bb+2bc-ac-cc$ (Quoto $b-c$

Div.re $a-b+c$

$$ab-bb+bc$$

$$bc-ac-cc$$

$$a-b+c$$

$$-ac+bc-cc$$

$$0$$

Altro

$-aa-4ab+7ac-4bb+14bc-12cc$ (Quoto $a+2b-3c$

$$-a-2b+4c$$

$$-aa-2ab+4ac$$

$$-2ab+3ac-4bb+14bc-12cc$$

$$-a-2b+4c$$

$$-2ab-4bb+8bc$$

$$6bc+3ac-12cc$$

$$-a-2b+4c$$

$$3ac+6bc-12cc$$

$$0$$

Delle Potenze Aritmetiche e loro Radici

Capo II.

Definizioni.

La Potenza Aritmetica altro non è che il prodotto di una quantità moltiplicata una o più volte in se stessa

Sia l'unità 1. e si moltiplichi per qualunque numero come per 2. onde si abbia il prodotto 2. e questo di nuovo si moltiplichi per 2 onde ne risulti il prodotto 4. quindi di nuovo per 2 sicchè risulti il prodotto 8; e così procedendo, come in figura

1
1 . 2 = 2
1 . 2 . 2 = 4
1 . 2 . 2 . 2 = 8
1 . 2 . 2 . 2 . 2 = 16
1 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 32
1 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 64
1 . 2 . 2 . . . . .

Tali prodotti si dicono potenze Aritmetiche. così il 2 sarà la prima potenza, il 4 potenza seconda, e in specie quadrato, l'8 potenza terza, e in specie cubo, il 16 potenza quarta, e in specie biquadrato il 32 potenza quinta, e in specie quadrato-cubo il 64 potenza sesta e in specie cubo-cubo, e così procedendo

2. La potenza prima, nel caso nostro il 2, per cui si fa la moltiplicazione dicesi ancora Radice ovvero Lato, la quale cambia la denominazione secondo alle diverse potenze a cui si riferisce.

Così rispetto alla potenza seconda, si dice radice seconda, ovvero quadrata; rispetto alla potenza terza si dice radice terza, ovvero cubica; rispetto alla potenza quarta si dice radice quarta, ovvero biquadrata; così diremo la radice quinta, sesta, &c.

3. Estrarre la radice è trovare per via di divisione quella quantità la quale moltiplicata una, o più volte in se stessa, produce la data quantità.

Così la radice quadrata di 4 è 2, poichè 2 moltiplicato in se stesso produce il detto quadrato. Similmente la radice cubica di 27 è 3, poichè $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$; e così delle altre.

Si dividono le radici in Razionali, irrazionali, ovvero sorde ed immaginarie. Sotto la prima passano tutte quelle radici che si estraggono [illegible] esatta perfetta. Così la radice di 36 è razionale: [illegible] è 6; ma la radice quadrata di 2 è irrazionale, imperocchè $1 \cdot 1 = 1 < 2$ e $2 \cdot 2 > 2$. Similmente la radice cubica di 64 è 4; ma la radice cubica di 25 è irrazionale, poichè $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 < 25$; e $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 < 25$. Ma

La radice quadrata di -4 è immaginaria; imperocchè $2 \cdot 2 = 4$; e $-2 \times -2 = 4$. Similmente la radice quarta di -16 è immaginaria poichè $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, e $-2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot 2 = 16$. Tali radici si dicono anche impossibili, ~~che~~ e tali generalmente sono le radici di tutte le potenze, il cui esponente cioè il grado delle dimensioni è numero pari. Ma la radice di una quantità ~~...~~ negativa, il cui esponente sia numero dispari può tavolta assegnarsi, come la radice terza di -27, poichè $-3 \cdot -3 \cdot -3 = -3 \cdot -3 = 9 \cdot -3 = -27$

4. ~~Di~~ Di qualunque genere poi sieno le radici si esprimono mediante il segno radicale $\sqrt{}$ coll'indice, ovvero esponente al di sopra del segno, il quale ne indichi il grado, ovvero ordine della radice.

Così $\sqrt[2]{16}$ esprime la radice quadrata di 16 la qual'è 4. $\sqrt[2]{68}$ esprime la radice quadrata di 68, la qual'è irrazionale. $\sqrt[2]{-64}$ esprime la radice seconda di 64, la qual'è immaginaria $\sqrt[3]{-8}$ esprime la radice terza di -8, la qual'è -2 perciò possibile, e razionale. Quando poi

nanca l'esponente, s'intende che la radice sia quadrata. Così $\sqrt{aa} = \sqrt[2]{aa}$.

Tavola delle ~~Radici~~ Potenze numeriche.

Unità	Potenze I.	Poten. II.	Poten. III.	Poten. IV.
1	1	1	1	1
1	2	4	8	16
1	3	9	27	81
1	4	16	64	256
1	5	25	125	625
1	6	36	216	1296
1	7	49	343	2401
1	8	64	512	4096
1	9	81	729	6561

Tavola delle Potenze Letterali

Unità	Radici	Quadrati	Cubi	Biquadrati
1	1	1	1	1
1	a	aa	aaa	aaaa
1	ab	aabb	aaabbb	aaaabbbb
1	abc	aabbcc	aaabbbccc	aaaabbbbcccc
1	aa	aaaa	aaaaaa	aaaaaaaa

Problema I.

Da qualunque dato quadrato estrarre la radice quadrata.

Risoluzione I.

Se la radice è semplice com'è la radice di un numero minore di 100, ella si avrà col sussidio della precedente tavoletta. Così $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt[3]{64} = 4$. Similmente $\sqrt{aa} = a$ $\sqrt[3]{aaabbb} = ab$; $\sqrt[4]{aaaa} = a$; $\sqrt[3]{-aaabbb} = -ab$. ec.

Risoluzione II.

Se la radice è Binomia. Si moltiplicherà il binomio, come $p + q$ in se stesso, diverrà il di lui quadrato $pp + 2pq + qq$, di cui questi sono gli elementi

I. Quadrato della prima quantità p.
II. Duplo prodotto della prima p nella seconda q
III. Quadrato della seconda q.

Come in figura.

$$\begin{array}{rl} & p + q \\ & p + q \\ \hline & pp + pq \\ & \quad\;\; pq + qq \\ \hline \text{Prodotto} & pp + 2pq + qq \end{array}$$

Sia poi un' altro quadrato

$$aa + 2ab + bb$$

Da cui debba estrarsi la radice quadrata

Risoluzione.

Radice ridotta

$$\sqrt{aa + 2ab + bb} = a + b$$

$$\begin{array}{l} aa \\ \hline 0 + 2ab \\ \quad\;\; 2a \\ \quad\;\; \underline{2ab} \\ \quad\quad\; 0 + bb \\ \quad\quad\quad\;\; \underline{bb} \\ \quad\quad\quad\;\; 0 \end{array}$$

Spiegazione.

Poichè aa è quadrato perfetto estraggo la sua radice a, la quale scrivo a canto, e sarà questa la prima radice; la moltiplico in se stessa, e il di lei quadrato aa lo sottraggo dal primo elemento aa, resta zero.

Per avere poi la seconda parte radicale divido il secondo elemento 2ab per 2a, doppio della radice a trovata, e diviene il quoto +b, che congiungo alla prima a per avere a+b.

Moltiplico quindi il quoto b nel divisore 2a, e il prodotto 2ab lo sottraggo dal ri

spettivo elemento 2ab, il residuo è zero.

Ma poichè la radice è binomia, e non deve restare termine alcuno, quadro la seconda radice b, e il di lei quadrato lo sottraggo dal rispettivo termine bb, il che fatto si esaurisce perfettamente la divisione e non resta alcun residuo. Però la prima radice è a la seconda b, e tutta la radice cercata a+b.

Applicazione del metodo ai numeri.

Ne' numeri vi sono i medesimi elementi sia il numero binomiale 23, cioè 20+3 e per se stesso si moltiplichi, saranno i suoi elementi come in figura

$$\begin{array}{r} a+b = 20 + 3 \\ a+b = 20 + 3 \\ \hline 400 + 60 \\ 60 + 9 \\ \hline aa+2ab+bb = 400 + 120 + 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{cioè}\quad 400 = & aa \\ 120 = & 2ab \\ 9 = & bb \\ \hline 529 = & aa+2ab+bb \end{array}$$

~~Sia ora~~ Ne numeri dunque vi sono i medesimi elementi che nelle lettere; ma è poi necessario il conoscere la specie della radice, cioè s'ella è binomia, o trinomia, ec.; e perchè la massima radice monomia 9. non estende il suo quadrato 81 oltre a due cifre, se sia dunque un quadrato il quale esti da più che due figure, sarà la sua radice più che monomia. Parimenti, perchè la massima radice binomia 99 non estende il suo quadrato oltre alle quattro cifre, ed è 9801 se diasi un quadrato [illegible] più di quattro cifre sarà la sua radice più che binomia. Laonde [illegible] la seguente regola, cioè per conoscere la specie della radice [illegible] del dato numero a due a due da destra a sinistra e sarà il numero delle cifre radicali [illegible] numero delle [illegible] [illegible] il numero [illegible] sarà la di lui radice trinomia; [illegible] del numero 54.68.39.27 sarà la radice quadrinomia e così delle altre.

Inoltre è necessario conoscere il uso degli
elementi donde essi nascono, cioè di sapere

I. che il quadrato delle unità dà unità.

II il prodotto delle unità per decine dà decine.

III il quadrato delle decine dà centinaja.

IV il prodotto delle decine per centinaja dà migliaja.

V. il quadrato delle centinaja dà decine di migliaja.

VI. il prodotto delle centinaja per migliaja dà centinaja di mig.a

VII. il quadrato delle migliaja dà milioni &c.

Sia qualunque intero sia il quadrato 1024
da cui debba estrarsi la radice.

E poichè il dato numero ammette due divi-
sioni, la radice sarà binomia.

E perchè la prima consta delle centinaja, si cerchi
in 10 il massimo quadrato, il qual è 9, e la
di cui radice 3 sarà la prima parte di radice.

Sottratto il quadrato 9 da 10, resta 1, a
cui congiunta la seguente cifra 2, sarà 12
il doppio prodotto della prima 3 nella seconda,
perciò divido 12 per 6 doppio della prima trovata,
e risulta 2 per la seconda parte di radice

moltiplico 2 nel divisore, e il prodotto 12
lo sottraggo dal n.o diviso 12 resta zero

Al residuo sovrappongo la quarta cifra 4,
e poichè qui deve esservi il quadrato della
seconda, da 4 sottraggo il di lei quadrato 4.

e si ha per ultimo residuo zero: laonde 2 è la seconda cifra radiale, e 30+2, cioè 32 è la radice cercata come in figura

Formola algebraica $aa + 2ab + bb$

Quadrato proposto	10.24	Radice $a+b$: 3 2
aa =	9	
$2ab$ =	12	
$2a$ =	6	
$2ab$ =	12	
bb =	04	
bb =	4	

Adesso se si moltiplichi in se stesso il trinomio $a+b+c$, e si osserveranno i di lui elementi si potrà dedurre la regola per estrarre la radice quadrata trinomia; ma poichè la formola $aa + 2ab + bb$ è sufficiente per estrarre qualunque radice, se per estrarre una nuova cifra radiale si considerano le prime già trovate come una sola cifra, di esse ci serviremo, dinotando loro numerazione coll'a, come segue in esempio.

formula algebraica aa + 2ab + bb

Quadratto proposto . 11.90.2.5 (Radice a b 3 4

aa = 9

2ab = 29

2a = 6

2ab = 24

bb = 50

bb = 16

34

Secondo ... 2ab = 342 (Radice a b 34 5

2a = 68

2ab = 340

bb = 25

Terzo ... bb = 25

0

Dovendo estrarre una nuova parte di radice si torna sempre al secondo termine 2ab della formula. Ma per maggiore speditezza in prattica, la radice, per esempio del quadratto aa + 2ab + bb si cava congiungendo ciascuna parte di radice tanto alla radice trovata, quanto al divisore, indi moltiplicando la cifra aggiungente nella quantità restante dal divisore, e la nuova cifra radicale, per indi sottrarre in un sol atto e il duplo prodotto della prima nella seconda e insieme il quadrato della seconda come in figura.

ilgcern.

iernier il

Quadrato proposto $aa + 2ab + bb$ (Radice $a + b$

$2a$

$0 + 2ab + bb$

$2a + b$

$2ab + bb$

0

Applicando anche a numeri questo metodo riesce più spedita la risoluzione. Esempio

Operazione I.

Quadrato proposto 5.4 9.9 0.2 5 (Radice a b / 2 3

$aa = 4$

$2ab + bb = 149$

$2a = 43$

$2a + b = 43$

$2ab + bb = 129$

Residuo I. 20

Operazione II. $2ab + bb = 2090$ (Radice a b / 23 4

$2a = 46$

$2a + b = 464$

$2ab + bb = 1856$

Residuo II. 234

Operazione III. $2ab + bb = 23425$ (Radice a b / 234 5

$2a = 468$

$2a + b = 4685$

$2ab + bb = 23425$

0

in questo metodo dunque, siccome vedi, cifre si aggiungono al residuo due elementi di alta volta, così nei numeri si deve deporre al residuo una classe di numero l'altra, le quali entreranno sempre i prefati elementi

Nota I.

Ma se operando questo il metodo indicato qualche prodotto non può sottrarsi, è indizio che la nuova cifra è maggiore del giusto, però deve diminuirsi d'un'unità

Nota II.

Se l'ultimo residuo non diviene zero è indizio che la radice è irrazionale, la quale [illegible] può estrarsi dal residuo, che per le regole di approssimazione, come si spiegherà a suo luogo.

Problema II.

Estrarre la radice cubica

Risoluzione I.

Se il dato cubo è di radice monomia, facilmente si cava la sua radice coll'uso della tavoletta precedente

Così $\sqrt[3]{aaa} = a$, $\sqrt[3]{-27} = 3$;
Parimenti $\sqrt[3]{343} = 7$; &c.

Risoluzione II.

Se il dato cubo, e di radice binomia, si moltiplichi di nuovo il quadrato del binomio $p+q$ nella radice $p+q$, e saranno i suoi elementi, come in figura

$$\begin{array}{r} pp + 2pq + qq \\ p + q \\ \hline ppp + 2ppq + pqq \\ ppq + 2pqq + qqq \\ \hline ppp + 3ppq + 3pqq + qqq \end{array}$$

ovvero $p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$

Nel cubo dunque si hanno questi elementi

1. il cubo della prima parte di radice.
2. il triplo prodotto della prima quadrata nella seconda semplice.
3. il triplo prodotto della prima semplice nella seconda quadrata.
4. il cubo della seconda.

Sia poi un'altro cubo $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, da cui debba estrarsi la radice cubica. Poichè il primo termine a^3 è cubo perfetto

la sua radice a sarà la prima parte ra
dicale.

Perchè poi il seguente termine $3a^2b$ con
tiene il triplo prodotto della prima quadra
ta nella seconda semplice, divido $3a^2b$
per $3a^2$ triplo quadrato della radice tro
vata, e risulta la seconda parte radicale
b.

Moltiplico poi il quoto b nel divisore
$3a^2$, e il prodotto $3a^2b$ lo sottraggo da
$3a^2b$, sarà il residuo zero.

In appresso sottraggo i rimanenti termini
da se stessi, cioè $3ab^2$, e b^3 da $3ab^2$ e b^3,
e diviene il residuo zero, sicchè la seconda
parte della radice sarà b, e la radice cer
cata $a+b$, come in figura.

Cubo dato $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (Radice $a+b$

$$\begin{array}{l} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ a^3 \\ \hline 0 + 3a^2b \\ \quad 3a^2 \\ \quad 3a^2b \\ \quad\quad 0 + 3ab^2 + b^3 \\ \quad\quad\quad 3ab^2 \quad b^3 \\ \hline \quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

Ovvero, che forma, [illegible] segue il prodotto $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ [illegible]

$$0 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \mid a+b$$

$$3a^3$$

$$3a^2b$$

$$3a^2b \quad \quad b^3$$

$$0$$

Applicazione del metodo ai numeri

Nei numeri [illegible] sono i membri [illegible] nella lettera, ma [illegible] il sito, [illegible] ov' essi cadono. Laonde si osservi

1. Che il cubo dalle unità dà unità.
2. [illegible] quadrate per decine [illegible].
3. [illegible] decine quadrate [illegible] unità danno centinaia.
4. Il cubo delle [centinaia] [illegible].
5. [illegible] per decine danno centinaia di migliaia.
6. [illegible] delle centinaia dà milioni [illegible]

[illegible] nella radice, come si ha dal seguente Teorema

[illegible] si dividano a tre a tre le cifre di un dato cubo sarà il numero delle divisioni eguale alle cifre della sua radice.

Imperocchè è, come dal calcolo si può vedere, il cubo della massima [illegible] [illegible] 9 non estende il suo cubo oltre [illegible] figure, nè la mas

nima binomia 99 oltre alle sei, né la mas
sima trinomia 999 oltre alle nove; e gene
ralmente, niuna radice può avere nel suo cu
bo più, che il triplo delle sue cifre, e perchè
non può averne meno, tolone due, nelle mi-
nime monomie, o binomie, ed e rimane tutta
via il medesimo numero di divisioni, o classi,
è manifesto il teorema.

Ciò inteso. Sia ora il cubo 32768 da-
cui debba estrarsi la radice cubica.

E imprima, perchè il detto numero ammette
due divisioni, la radice, pel teorema precedte.
sarà binomia.

In secondo luogo, poichè il cubo delle decine
esiste nella classe delle migliaja cerchisi in 32
il massimo cubo, il quale è 27, e la sua ra
dice $\overset{3}{\text{tre}}$ sarà la prima cifra.

Dal cubo imperfetto 32. sottraggasi 27. cubo
della radice trovatta, resta 5.

Al residuo 5 si deggnea la seguente classe
768, e si avrà 5768 uguale a tre altri
elementi, di cui il primo è $3a^2b = 57$.
perciò dividasi 57 per 27 $3a^2$, ovvero sotras

cioè ~~5768~~ soddisfatto 27 ~~sotto~~ al 5768 detto la prima delle deposte, si divida 57 per 27, il quoto 2 sarà la seconda cifra radicale.

Si triplica ... nel divisore, e il prodotto ... lo sottraggo unitamente agli altri elementi, cioè 36 triplo prodotto della prima semplice nella seconda quadrata, e 8 cubo della seconda, fatta però avvanzare una figura verso destra ne' due ultimi elementi, per le annotazioni premesse, e si avrà il residuo zero, e tutta la radice cercata 32, come in figura.

Formula algebraica $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Cubo proposto		32768	Radice a b / 3 2
a^3	=	27	
$3a^2b + 3ab^2 + b^3$	=	5768	
$3a^2$	=	27	
b	=	2	
$3a^2b$	=	54	
$3ab^2$	=	36	
b^3	=	8	
$3a^2b + 3ab^2 + b^3$	=	5768	

La stessa formula $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ha luogo ancora nelle radici trinomie, quadrinomie, etc. se le ... già trovate si considerano come una sola quantità uguale ad a, por

nato l divisore. dal loro quadrato triplo,
fatto cioè numero sempre al secondo elemento,
onde avere una nuova radice b, come si
vede nel seguente esempio

Formula algeb.a $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(Operaz.e I)

cubo proposto 1.740.992.427 (Radice a b 1 2

$a^3 = 1$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 0740$

$3a^2 = 3$

$b = 2$

$3a^2b = 6$

$3ab^2 = 12$

$b^3 = 8$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 728$

Residuo I. 12

(Operaz.e II) $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 12992$ (Radice a b 12 0

$3a^2 =$ diviene zero

(Operaz.e III) $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 12992427$ (Radice a b 120 3

$3a^2 = 43200$

$b = 3$

$3a^2b = 129600$

$3ab^2 = 3240$

$b^3 = 27$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 12992427$

Residuo 0

...otio

Se il binomio $p+q$ s'inalzi agl'altri gradi di potenza, e si analizzeranno i suoi elementi si potrà estrarre la radice quarta, quinta, etc., osservando che la specie della radice è sempre analoga all'esponente della potestà data; però per la radice quarta si divideranno le figure della data potenza a quattro, per la radice quinta a cinque a cinque etc. Esempio

Sia da estrarre la radice biquadratica da qualunque biquadrato

Alzo prima il binomio $a+b$ alla potenza quarta moltiplicando il di cui cubo $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ di nuovo per $a+b$, onde avere la formula, come in figura

$$\begin{array}{lllll} a^3 & +3a^2b & +3ab^2 & +b^3 & \\ a & +b & & & \\ \hline a^4 & +3a^3b & +3a^2b^2 & +ab^3 & \\ & a^3b & +3a^2b^2 & +3ab^3 & +b^4 \\ \hline \end{array}$$

Formula. $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

di cui questi sono gli elementi

1. Il biquadrato della prima parte della radice, a.
2. il quadruplo prodotto della prima cubica nella 2da semplice.
3. Il sestuplo prodotto della prima quadrata nella 2da quadrata.
4. Il quadruplo prodotto della prima semplice nella 2da cubica.
5. Il biquadrato della seconda b.

Sia ora il numero 2.0944.1388.9681 da cui debba ricavarsi la radice biquadrata, la quale giusto le regole indicate è quadrinomia.

Formula algebr. $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

(Operaz. 1.)

Biquadrato proposto	2.0944.1388.9681	Radice: a b / 1 2
$a^4 =$	1	
$4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 =$	10944	
$4a^3 =$	4	
$b =$	2	
$4a^3b =$	8	
$6a^2b^2 =$	24	
$4ab^3 =$	32	
$b^4 =$	16	
$4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 =$	10736	
Residuo I.	208	

(Operaz. II)

	2081388	a b / 12 0

(Operaz. III)

	2081388.9681	a b / 120 3
$4a^3 =$	6912000	
$b =$	3	
$4a^3b =$	20736000	
$6a^2b^2 =$	777600	
$4ab^3 =$	12960	
$b^4 =$	81	
$4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 =$	2081388964	

S'innalzi a+b alla potenza quinta, il che si ottiene moltiplicandola pel suo biquadrato, e si avranno gli elementi per estrarre la radice quinta, come in figura

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$a + b$$

$$a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4$$
$$a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5$$

Formula $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Sia il numero 25195799092862 43 da cui debba estrarsi la radice quadrato-cuba

(Operaz. I) 2.5195 7.9909 2.86243 (Radice a b / 1 2)

$a^5 = 1$

1 5 1 9 5 7

$5a^4 = 5$

$b = 2$

$5a^4b = 10$

$10a^3b^2 = 40$

$10a^2b^3 = 80$

$5ab^4 = 80$

$b^5 = 32$

148832

Resid.° I. 3125

quoz.° II diviene zero, onde la radice (Radice a b / 12 0)

Operaz.° II. 3125990928 6243 (Radice a b / 120 3)

$5a^4 = 1036800000$

$b = 3$

$5a^4b = 3110400000$

$10a^3b^2 = 155520000$

$10a^2b^3 = 3888000$

$5ab^4 = 48600$

$b^5 = 243$

3125990928 6243

Residuo 0

Questo metodo però ch'è l'ordinario dell'algebra è troppo lento, poichè per trovare la formula dei gradi superiori è necessario passare per tutte le potenze precedenti, come fin qui s'è veduto. Il celebre Newton ne stabilì un'altra più immediata, e però più speditа, la cui regola è questa.

Per trovare il coefficiente di un termine qualunque della potenza di un binomio $p+q$, moltiplicate il coefficiente del termine che precede per l'esponente che p ha in detto termine, e dividete il prodotto pel numero ch'esprime il luogo di esso termine precedente; il quoto sarà sempre il coefficiente cercato.

Vogliasi la settima potenza di $p+q$ si scriva

$$(p+q)^7 = p^7 + \frac{1\cdot7}{1}p^6q + \frac{7\cdot6}{1\cdot2}p^5q^2 + \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}p^4q^3 + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}p^3q^4$$
$$+ \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{2\cdot3\cdot4\cdot5}p^2q^5 + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}pq^6 + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}p^0q^7$$

Cioè riducendo, sarà

$$\overline{p+q}^7 = p^7 + 7p^6q + 21p^5q^2 + 35p^4q^3 + 35p^3q^4 + 21p^2q^5 + 7pq^6 + q^7.$$

E se si voglia generalizzare la regola fin là possiamo dimostrarla, si troverà che per elevare un binomio $a+b$ a una potenza m, bisogna scrivere.

$$\overline{a+b}^{m} = \begin{cases} a^{m} + m a^{\overline{m-1}} b + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{2} a^{m-2} b^{2} + \frac{m \cdot \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^{3} \\ + \frac{m \cdot \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{\cdots} b^{4} \text{ ec. di seguito} \\ \text{sino all'ultimo termine che avrà questa forma} \\ \frac{m \cdot \overline{m-1} \times \overline{m-2} \cdots m+1 \times \overline{m-1}}{2 \cdot 3 \cdots m} b^{m}. \end{cases}$$

Applicando questa formula a qualche esempio, si vedrà con qual prontezza ella lo sodisfa. Sia da trovarsi la nona potenza del binomio $a+b$. Fatto $m = 9$, e sostituiti i convenienti valori nella formula suddetta, si avrà

$$\overline{a+b}^{9} = \begin{cases} a^{9} + \frac{1 \cdot 9}{1} a^{8} b + \frac{9 \cdot 8}{2} a^{7} b^{2} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3} a^{6} b^{3} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{5} b^{4} \\ + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{4} b^{5} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^{3} b^{6} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} a^{2} b^{7} \\ + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} a b^{8} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} b^{9} \end{cases}$$

cioè fatta la riduzione

$$\overline{a+b}^{9} = a^{9} + 9a^{8}b + 36a^{7}b^{2} + 84a^{6}b^{3} + 126a^{5}b^{4} + 126a^{4}b^{5} + 84a^{3}b^{6} + 36a^{2}b^{7} + 9ab^{8} + b^{9}.$$

Questo però è un piccolo saggio dell'utilità di questa formula. Avremo da farne uso in infinite altre occasioni.

La dimostrazione però dipende dalle regole delle combinazioni, come a suo luogo si spiegarà.

Osservazioni

1. Se qualche prodotto non si può sottrarre dalle figure corrispondenti, è indizio che la nuova radice è maggiore del giusto, e però conviene minorarla d'un unità.

2. La prova. Se dall'ultima sottrazione qualche cosa avvanza, è indizio che la quantità proposta non è potenza perfetta, nè può, in tale caso esprimersi se non dalla massima potenza, che nel dato numero si contiene.

Come poi abbiamo approssimarsi nelle radici respinte si spiegherà a suo luogo.

Perciò la prova di qualunque estrazione di radice si fa quadrando, cubando, etc la radice trovata, e all'ultimo risultato vi si aggiunge il residuo, seppure ve n'hà alcuno.

Ovvero più speditamente si aggiungano tutti i prodotti coll'ordine medesimo, che nell'operazione si attrovano, poichè la loro somma col residuo dell'ultima sottrazione dee restituire la quantità proposta.

[illegible]

Della prima Analisi Aritmetica

Capo III.

Deffinitioni

1 L'analisi Aritmetica è la scienza, onde si solvere tutti i problemi, che possono proporsi intorno alla quantità.

2. Il metodo poi di cui si fa uso nella risoluzione de problemi si è l'equatione.

3. Equatione altro non è che una comparatione di due quantità uguali, le quali possono essere, o semplici, o complesse. semplice, come se sia $a = b$; complessa, come se abbiasi $a + b = c + d + f$.

4. L'equatione altra è sintetica, come le precedenti ove niuna incognita v'interviene; altra analitica, dove interviene qualche incognita da determinarsi, e di questa specie di equationi si assume qui a trattare. Di un tal genere sarebbe $a + x = b$; ovvero $2a - x = f + c$; ovvero $x^2 + x - a = f$. etc. Tali quantità poi si dicono membri o parti dell equatione, nè può averne più che due

5. Di nuovo l'equazione altra è semplice, come quando l'incognita massima non ascende che il primo grado di potenza, come $x-a=b$; altra composta, cioè la massima incognita supera il primo grado; onde avviene di dover distinguere i problemi, giusto il grado delle dimensioni. Trattaremo ora delle semplici per trattare delle composte a suo luogo

Assiomi
di cui principalmente si fa uso nella risoluzione delle equazioni.

1. Se a cose uguali si aggiungono cose uguali resta uguaglianza. Sia $a=b$; aggiunta c da una parte e dall'altra, sarà pure $a+c=b+c$.
2. Se da cose uguali si tolgano cose uguali, resta uguaglianza, così se abbiasi $a = b$, e si tolgano le quantità c, d uguali, resta $a-c=b-d$.
   Parimenti se da cose inequali si aggiungano, o tolgano cose uguali, resta inequalità.
3. Se cose uguali si moltiplichino per uguali, risulta uguaglianza. Sia $a=b$, e $c=d$, sarà ancora $ac=bd$, cioè i prodotti ac, bd sono uguali.

4. Similmente se quantità uguali si dividano per uguali, saranno uguali anco i quozienti. Sia $a = b$, e si dividano per le uguali c, d, sarà $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

5. Le potenze simili di uguali quantità sono uguali. Così se sia $a = b$; sarà ancora $a^2 = b^2$; similmente $a^3 = b^3$; e così delle altre potenze simili.

6. ~~Così~~ Viceversa le radici simili di uguali potenze sono uguali. Così se abbiasi $a^2 = b^2$, sarà ancora $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$. Parimenti se sia $a^3 = b^3$, sarà pure $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{b^3}$, ecc.

7. Le cose uguali ad una medesima cosa sono ancora uguali tra di loro. Così se sia $a = b$, e $c = b$, sarà ancora $a = c$.

8. Se in luogo dell'uguale si sostituisca l'uguale, rimane uguaglità. Così, se sia $a = b$, e $c + d = a$, sostituendo $c + d$ in luogo di a, si avrà parimenti $c + d = b$.

Regole generali per l'Analisi

1. Le quantità note nelle Equazioni si esprimono per numeri, e universalmente per le prime lettere dell'Alfabetto a, b, c, d. Le incognite, di cui si va investigando il valore per le ultime lettere dell'alfabetto x, y, z ed anco per altre greche, il che è arbitrario.

Cercasi per esempio la facoltà di Tizio e Sempronio la facoltà del secondo è doppia della facoltà del primo più 7, e la somma della una e dell'altra è 391. Si cerca la facoltà di ciascuno.

Si esprima il problema secondo le condizioni con cui viene proposto. Se si chiami dunque x la facoltà di Tizio, sarà la facoltà di Sempronio $2x + 7$; e però per la condizione del problema, l'equazione $x + 2x + 7 = 391$.

2. Universalmente [illegible] la [illegible] ragione 1 : 2 [illegible]

ponga = 1. m. e 7 = b. e 91 = a, chia-
mando x la facoltà di Seio, sarà la facol-
tà di sempronio $mx + b$, e però per la
conditione del problema l'equatione
$x + mx + b = a$.

Problema 1.

Ridurre un'equatione ... come
sia ad un solo termine incognito.

1. Se all'incognita va congiunta una quan-
tità col segno +, la riduttione si fac-
cia per via di sottrattione. Così se a ...
equatione $x + b = a$, sottraendo b da
una parte, e dall'altra diviene $x = a - b$.
cioè ridotta al solo termine incognito.

2. Se ... congiunta col segno −, si fac-
cia la riduttione per via di additione. Così
se sia $x - b = 2a$, aggiungendo da una
parte e dall'altra b, si riduce ad $x = 2a + b$

Questa riduttione però in pratica si fa più
speditamente trasportando la quantità che vuo-
le separarsi nell'altro membro dell'equatione
scambiato il segno di + in −, e − in +. Il che

si dice con voce Greca Antitesi, cioè trasposizione; ed è vantaggio ben grande il potere alterare i termini senza alterare l'equalità.

3 Se l'incognita abbia qualche coefficiente, cioè si moltiplichi per qualche quantità nota, la riduzione si faccia per via di divisione. Così se sia $3x = 12$, dividendo da una parte, e dall'altra per 3 diviene $x = 4$.

4 Se l'incognita si divide per qualche quantità, si faccia la riduzione per via di moltiplicazione. Così se sia $\frac{x}{3} = a$, moltiplicando dall'una, ed altra parte per 3, diviene $x = 3a$.

La ragione, è manifesta: imperocchè una quantità moltiplicata, e divisa per una medesima quantità resta invariata.

Quindi perchè le frazioni non sono quantità minori divise per quantità maggiori, intervenendo frazioni, si sterminano dalle equazioni moltiplicando nello stesso modo, se per compendio in vece di moltiplicarle, cioè di eliminarle ad una ad una, si moltiplica il numeratore di ciascuna [illegible]
[illegible]

5. Se l'incognita è elevata a qualche potestà eccedente il primo grado, la riduzione si fa estraendo la radice, che indica l'esponente dell'incognita da una parte, e dall'altra. Così se abbiasi $x^2 = 64$, estratta la radice quadrata dall'uno, e dall'altro membro, diviene $x = \sqrt{64} = 8$.

Si eccettuano da questa regola le equazioni affette de' gradi superiori, le quali quali esigono in oltre altre regole, di cui si tratterà altrove.

6. Se un membro dell'equazione sia affetto dal segno radicale, si rimuove esso segno, cioè si fa la riduzione, cancellando il segno, e innalzando l'altro membro alla potestà, che indica il numero posto sopra il segno radicale. Così se sia $x = \sqrt{64}$, sarà riducendo $x^2 = 64$. Parimenti, se sia $x = \sqrt[3]{ab}$ riducendo diviene $x^3 = ab$. Tutto ciò è manifesto dagli assiomi premessi.

Problema II.

Ridurre due, o più equazioni esprimenti le condizioni di qualche problema ad una sola incognita.

Ciò si eseguisce per via di sostituzione, eliminando prima le incognite ad una ad una

come dalle seguenti regole.

Sieno le due equazioni

$$x + y = a \quad A$$
$$x - y = b \quad B$$

I. Col prob. medo si riduca una delle equazioni date all'incognita che vuole eliminarsi

II. Il ricavato valore si sostituisca nella altra, indi di nuovo si riduce alla sola incognita che trovasi nell'ultima equazione, e si avrà il valore dell'incognita rimasta. il quale determinato, si deduce il valore della rimanente

Sieno le due equazioni

$$x + y = a \quad A$$
$$x - y = b \quad B$$

Nell'equazione A volendo eliminare x si trasponga y, e diverrà $x = a - y$

Sostituisco $a - y$ valore di x in B, e diviene $a - y - y = b$, ovvero $a - 2y = b$ in cui x più non comparisce.

Ora riduco l'equazne $a - 2y = b$ all'incognita y, però traspongo $2y$, e b, onde avere le quantità positive e diviene

$$a - b = 2y$$

E dividendo per 2, si trova $y = \frac{a-b}{2}$

3. Se sieno due, o più equazioni in cui ~~termini altri~~ ciascun termine abbia coefficiente e segno, il coefficiente dell' incognita che vuole eliminarsi si moltiplichi ad uno ad uno nelle altre equazioni. Quindi il valore di una si sostituisca in tutte le altre; e si repetta poi la medesima operazione finchè si perviene ad una sola equazione, la quale ridotta pel Coroll. 1. ad un solo termine incognito, si troverà il valore delle altre, come sopra.

Esempio

Sieno le due equazioni

$$2x + 5y = 90 \quad A$$
$$3x + 4y = 86 \quad B$$

Volendo eliminare x, moltiplico reciprocamente l'una equazione nel coefficiente che ha x nell' altra, cioè l' equazione A per 3, e B per 2 il che fatto divengono

$$6x + 15y = 270 \quad A$$
$$6x + 8y = 172 \quad B$$

in A per antitesi, cioè trasportando $15y$ diviene $6x = 270 - 15y$

Ora sostituendo questo valore in B, diviene $270 - 15y + 8y = 172$ dove x più non comparisce.

Riducendo poi queste equazioni ad un solo termine incognito pel Probl. I.

Prima diviene 270 − 7y = 172

onde trasportando − 7y, e 172, ovvero che torna lo stesso scambiati tutti i segni, e trasponendo 270, diviene 7y = 270 − 172

Cioè 7y = 98

E dividendo per 7, y = 14.

Per avere poi il valore di x, nella prima equazione A, avente la medesima incognita x, ed è più semplice, sostituisco 14 valore di y come segue

I. Trasporto 5y, e diviene 2x = 90 − 5y

II. Divido per 2 da una parte, e dall'altra e risulta $x = \frac{90 - 5y}{2}$.

III. In vece di y sostituisco 14, e si trova

$$x = \frac{90 - 5 \times 14}{2} = \frac{90 - 70}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Altro Esempio

Sieno le seguenti tre equazioni

$$x + y = a = 10 \quad A$$
$$y + z = b = 15 \quad B$$
$$z + x = c = 22 \quad C$$

Nella prima A trasposto x, diviene y = a − x

Sostituendo il valore a − x in B, sarà a − x + z = b,

E riducendo pel Probl. I alla sola incognita z, diviene

z = x + b − a

Di nuovo, sostituendo $x+b-a$ valore di z in

C, diviene $x+b-a+x=c$

Cioè riducendo $2x+b-a=c$

E riducendo alla sola incognita x cioè trasportando b, $c-a$, indi dividendo per 2, risulta

$$x=\frac{a+c-b}{2}=\frac{10+22-15}{2}=8+\frac{1}{2}$$

valore di x

Dunque $y=a-x=10-8\frac{1}{2}==1\frac{1}{2}$

E però $z=x+b-a=8\frac{1}{2}+15-10=13\frac{1}{2}$

Si verifica dunque se il prodotto dal primo nel secondo ——— = ——— = 10

Del secondo nel terzo = = —— 15

E del terzo nel primo — —— = 22

Altro Esempio

Siano le tre equazioni, in cui ciascun termine ha il suo coefficiente espresso

$$2x+3y+4z=64 \quad A$$
$$3x+4y+5z=87 \quad B$$
$$4x+2y+6z=86 \quad C$$

Volendo far sparire l'incognita x moltiplico prima l'equaz.e A per 3 e 4 coefficienti delle altre, ovvero incognite simili di B e C, ovvero per 12 prodotto di essi coefficienti 3, e 4 il che fatto, diviene la prima

$$24x + 36y + 48z = 768 \quad A$$

ovvero dividendo per 6

$$4x + 6y + 8z = 128 \quad A$$

moltiplico B per 8 prodotto de' coefficienti di x nelle equaz.ni A, C e diviene

$$24x + 32y + 40z = 696 \quad B$$

moltiplico C per 6 prodotto de' coefficienti di x in A, e B, e diviene

$$24x + 12y + 36z = 516 \quad C$$

che dividendo queste tre equaz.ni per 4, divengono

$$6x + 9y + 12z = 192 \quad A$$
$$6x + 8y + 10z = 174 \quad B$$
$$6x + 3y + 9z = 129 \quad C$$

In A trasponendo 9y e 12z, diviene

$$6x = 192 - 9y - 12z$$

sostituito 192 − 9y − 12z in B, e C, si ha

$$192 - 9y - 12z + 8y + 10z = 174 \quad B$$
$$192 - 9y - 12z + 3y + 9z = 129 \quad C$$

ovvero

$$192 - y - 2z = 174 \quad D$$
$$192 - 6y - 3z = 129 \quad E$$

in cui x più non apparisce

Riduco D alla sola incognita y e diviene

$$y = 18 - 2z \quad D$$

moltiplicando per 6

$$6y = 108 - 12z \quad D$$

sostituendo $108 - 12z$ in E diviene

$$192 - 108 + 12z - 3z = 129$$

dove x, y più non si vedono.

Riduco con E alla sola z, e diviene

$$5$$

Dunque, $18 - 2z = 18 - 10 = 8$

E però $x = \frac{192 - 9y - 12z}{6} = \frac{192 - 72 - 60}{6}$

$$= \frac{192 - 132}{6} = \frac{60}{6} = 10.$$

I valori trovati dunque sono

$$x = 10$$
$$y = 8$$
$$z = 5$$

Queste sono le regole generali dell'Analisi nella risoluzione de' problemi, ma il loro uso esige una certa industria, che cogli esempi meglio dichiareremo.

Sezione II.

Della Ragione e Proporzione Aritmetica

Capo I.

Definizioni.

1. Ragione, che dicesi anche Rapporto o Relazione, è una comparazione di due quantità tra di loro rispetto al modo

2. Quando si considera la differenza di due quantità, come 5, e 3, la cui differenza è 2, allora si considera una ragione Aritmetica.

3. Le quantità paragonate si dicono termini della ragione, il primo de' quali in specie si dice Antecedente, l'altro Conseguente. Così nella ragione di 9 a 7, l'Anteced.^e è 9, l'altro il conseg.^te

4. Due ragioni Aritmetiche uguali, cioè aventi una medesima differenza costituiscono una Proporzione Aritmetica. Così 5, 3 :: 9, 7 formano una Proporzione Aritmetica.

5. Se i termini sono tutti diversi, come nella precedente la proporzione si dice Discreta, se un termine si ripete due volte, si dice continua, come 5, 7 = 7, 9 e quale si esprime in noto modo ÷ 5. 7. 9

6. Gli anteced. 5, e 7 si dicono Omologhi, cioè omogenei di luogo, e parimente i conseguenti tra di loro.

Assioma

In ogni sottrazione la differenza aggiunta alla quantità sottratta, è eguale alla minuenda, da cui si fece la sottrazione: Così se sia 12 − 8 = 4; sarà 8 + 4 = 12. Parimenti se sia a − b = m; sarà b + m = a generalmente a − b = ± m; sarà b ± m = a, cioè che a è maggiore, o minore di b.

Teorema.

Se quattro quantità siano Aritmeticamente proporzionali dico che la somma delle estreme sarà uguale alla somma delle medie.

Cioè se sia a, b = c, d
dico che sarà a + d = b + c.

Poichè sono uguali le ragioni di a, b e di c, d
e se avranno una medesima differenza, la quale
se si dica m, ella sarà $\pm m$, secondo che l'an-
tecedente è maggiore, o minore del conseguente.

Ottenendo dunque l'uguale in vece dell'uguale,
sarà per l'assioma premesso

$$b \pm m \,.\, b = d \pm m \,,\, d$$

Ora somma dei termini estremi $b \pm m + d$
somma dei medj $b \pm m + d$

ma $b \pm m = a$; e $d \pm m = c$.
Dunque $a + d = b + c$. Il che

Corollario.

Quindi se tre quantità sieno in
proporzione continua, sarà la somma
degli estremi uguale al doppio medio.

Sia $a, b = b, c$
Dunque $a + c = 2b$

Problema 1.

Date tre quantità a, b, c, trovare
a quarta proporzionale Arimetica:
Sia quella x
Dunque $a, b = c, x$
ma pel teor. preced.^{te} $a + x = b + c$
[illegible]

cognita x, diviene

$$x = b + c - a$$

Cioè per avere la quarta proporzionale Aritmetica, si aggiungono il secondo, e terzo termine, e dalla somma si sottra il primo, che ne indica la formula ritrovata.

Siano date le quantità 30, 42, 123, per avere dunque la quarta proporzionale aggiungo 42, e 123, e dalla somma 165 sottraggo la prima 30; la differenza 135, sarà la quarta proporzionale cercata.

Problema II.

Date due quantità a, b, trovare la terza in proporzione Aritmetica continua.

Se si dica x; si avrà

$$a, b = b, x$$

Dunque $\quad a + x = 2b$

E si trova $\quad x = 2b - a$

Cioè si raddoppia la seconda, e dal doppio si sottra la prima, la differenza sarà la terza proporzionale cercata.

Problema III.

Fra due date quantità a, b, tro

vare la media proporzionale conti-
de. Si dica x, sarà

$$a \,,\; x \;\div\; x \,,\; b$$

e $\qquad 2x = a + b$

e dunque $\qquad x = \frac{a+b}{2}$

cioè, per avere [illegible] la proporzionale tra due date quantità, bisogna aggiungerle insieme, e dalla somma pigliare la metà.

Siano date 24, 37
la loro somma è 61
la cui metà $30\frac{1}{2}$ è la media cercata.
Onde sarà $\div$ 24 . $30\frac{1}{2}$. 37

Annotazione

Se più quantità sono in continua proporzione Aritmetica allora si ha una progressione, ovvero serie Aritmetica, [illegible] cui proprietà tratteremo a suo luogo.

Della Ragione, e Proporzione Geometrica

Capo II.

Definizioni.

1. Quando si considera quante volte una quantità si contiene, o è contenuta nell'altra, si considera la ragione Geometrica di esse quantità.

Così se paragonando 12 a 4 si considera quante volte il 12 contiene il 4 si ha una ragione Geometrica, la quale si esprime con due punti in questo modo 12 : 4, ovvero come le frazioni $\frac{12}{4}$.

2. Le due quantità componenti la ragione si dicono termini della ragione, e in specie il primo 12 si dice Antecedente, l'altro 4, si è il Conseguente.

3. Il quoziente che risulta dividendo l'antecedente pel conseguente si dice esponente della ragione così nella ragione 12 : 4 l'esponente è 3. Parimenti della ragione 16 : 4 l'esponente è 4.

4. La ragione Geometrica, altra si dice di ugualità, altra d'inegualità. La prima

si ha quando l'antecedente uguaglia il conseguente, come 4 : 4, ovvero a : a;
la seconda quando l'antecedente eccede, o decade dal conseguente, come a : b.

5. Di nuovo, la ragione d'inegualità si divide nella ragione di maggiorità, cioè di maggiore inegualità, ed è quando l'Antecedente contiene alquante volte il conseguente, come 18 : 3 e in ragione di minorità, ovvero di minore inegualità, cioè quando l'Antecedente è alquante volte contenuto dal conseguente, come 4 : 8

6. La ragione di maggiore inegualità si dice moltiplice se l'antecedente contiene precisamente il suo conseguente alquante volte, la quale se lo contiene due volte in specie, si dice dupla, come 6 : 3, se tre volte lo contiene si dice tripla, come 12 : 4 etc. come a denominarsi pone te.

7. La ragione di minore inegualità poi si dice sottomoltiplice se l'antecedente è contenuto alquante volte precisamente nel suo conseguente. la quale in specie si dice suddupla se due volte è contenuto, come 3 : 6; se tre volte è contenuto si dice sottotripla, come 4 : 12 etc.

La stessa parte poi moltiplicata, la quale alquante volte presa uguaglia il suo tutto si dice anche parte aliquota come 4 rispetto al 12 altrimenti è aliquanta, come 5 rispetto al 9.

4. La ragione di maggiorità si dice soprapparticolare se l'antecedente contiene il conseguente una volta, con alquante aliquote come 3 : 2, il cui esponente è $1\frac{1}{2}$ e in specie dicesi sesquialtera, se l'esponente è $1\frac{1}{2}$, come la precedente si dice sesquiterza, come 4 : 3, in cui l'esponente è $1\frac{1}{3}$ ecc. E opposte ragioni della subsoprapparticolare nella minore inegualità per es. 2 : 3 sarà subsesquialtera ; 3 : 4 subsesquiterza, ecc.

5. Quando nella maggiore inegualità l'antecedente [illegible] il conseguente [illegible] la ragione [illegible] si dice [illegible] [illegible] è $1\frac{2}{3}$ [illegible] 5 : 3, [illegible] esponente è $1\frac{2}{4}$ [illegible] ragioni [illegible] subsuperpartienti nella minore inegualità.

10. [illegible] ed [illegible] e la moltiplica [illegible] [illegible] cioè quando l'antecedente [illegible] ne due o più volte [illegible] il conseguente [illegible] [illegible] qualunque, e la [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] due o più volte il conseguente. [illegible] [illegible] antecedente. [illegible] [illegible] [illegible] che, [illegible] subdupla [illegible] minore, e [illegible] [illegible] [illegible] della [illegible] [illegible] inegualità.

11. Si dicono uguali due ragioni [illegible] [illegible] quando l'antecedente della [illegible] [illegible] [illegible] o è contenuto nel suo conseguente, come l'antecedente della [illegible] [illegible], o è contenuto nel suo conseguente. Così 6 : 2, e 15 : 5 saranno [illegible] ragioni uguali.

12. Due ragioni ~~uguali~~ [illegible] Geometriche, [illegible] costituiscono una Proporzione Geometrica [illegible] 6, 2, 15 5 formano una Proporzione Geometrica.

[illegible] Qualunque [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] egualità [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ragioni uguali. Così [illegible] [illegible] ovvero 2 : 6

$= c : d$ esprime una proporzione Geometrica e si enuncia così; a sta a b, come c a d ovvero, a diviso per b, è uguale a c diviso per d

14 Le quantità che egualmente contengono altre quantità si dicono Equimoltiplici. Così 12 e 9 sono equimoltiplici di 4 e 3, perchè ambedue sono triple delle rispettive parti 4. e 3.

15 ~~Quantità~~ Parti simili diconsi quelle che sono denominate da una medesima quantità e quali le esattamente si contengono nei loro tutti si appellano aliquote simili. Così 4 e 3 sono simili parti aliquote dei loro tutti 12 e 9, perchè ambedue sono parti terze.

Assioma.

In qualunque divisione il prodotto dal quoziente nel divisore uguaglia il dividendo.

Così se abbiasi $a : b$ e il quoto, ovvero esponente della ragione si dica m, sarà $bm = a$.

Teorema 1.

Se sieno proporzionali quattro quantità $a : b :: c : d$, dico che il prodotto ad delle estreme uguaglia bc prodotto delle medie.

invece vi è fatta la sostituzione. questo il premesso assioma. sarà

$bm : b :: dm : d$

Prodotto degli estremi = bdm, de' medj = bdm

Esempio

sia $6 : 2 :: 12 : 4$

Prodotto degli estremi 24. de' medj 24.

Coroll. I.

Quindi nella proporzione continua il prodotto degli estremi uguaglia il quadrato del termine medio

sia $a : b :: b : c$

si avrà $ac = b^2$

Coroll. II.

Quindi pure date tre quantità a, b, c si trova la quarta proporzionale:
poichè se si dica x, sarà pel teorema precedente $a : b :: c : x$

Laonde pel teorema precedente

$$ax = bc$$

E dividendo per a, risulta $x = \frac{bc}{a}$

cioè si deve moltiplicare il secondo termine b nel terzo c, e dividere il prodotto bc per primo a.

Coroll. III.

Similmente, se date due quantità a, b, si debba determinare la terza, essa si trova pel med.mo teorema

imperocchè sarà $a : b = b : x$

Onde pel d.o teorema $ax = bb$

E diviene $x = \frac{bb}{a}$.

cioè si deve quadrare la seconda, e il quadrato dividerlo per la prima.

Coroll. IV

Ma se tra due date quantità a, b si debba trovare la media x, sarà

$$a : x = x : b$$

Laonde pel d.o teorema

$$x^2 = ab$$

E diviene $x = \sqrt{ab}$

cioè dal prodotto delle quantità date si dee estrarre la radice quadrata.

Scolio. Questa regola fu detta aurea dagli antichi atteso il singolare vantaggio

che da lei si ritrae tanto ~~nell'a...~~ nel civile commercio, quanto nelle scienze.

Teorema II.

Se quattro quantità a, b, c, d, siano talmente disposte che ad prodotto delle estreme uguagli bc prodotto delle medie; dico che esse quantità saranno proporzionali.

Alle tre prime a, b, c, si trovi la quarta proporzionale x

Sarà $a : b = c : x$

E pel teorema I. $ax = bc$

Ma per ipotesi si ha pure $ad = bc$

Dunque (ass 7.) $ax = ad$

E dividendo per a, diviene $x = d$

La quarta proporzionale dunque è d; però le date quantità a, b, c, d sono in proporzione. il che, ec.

Corollº.

3º modo. se sieno uguali due prodotti, potranno i loro efficienti proporzionarsi in molti modi, pigliando l'uno verso sinistra l'altro verso d'rra, indi di nuovo verso destra, l'altro a sinistra.

sia . $abcd = efgh$

$a : e :: fgh : bcd$

$ab : fg :: eh : cd$

$bc : ef :: gh : ad$

$cd : g :: efh : ab$

il che si può fare in infiniti modi

Per numeri

Sia $2 \times 12 = 6 \times 4$

sarà $2 : 6 :: 4 : 12$

e $2 : 4 :: 6 : 12$

e $12 : 6 :: 4 : 2$ etc.

dicesi questo metodo lo sceglière delle equationi.

Teorema III.

Se sieno quattro proporzionali, ancora invertendo i termini delle ragioni, saranno i quattro termini proporzionali.

Sia $a : b :: c : d$ A

Dico che sarà ancora $b : a :: d : c$ B

Fatta la sostitud.e in A, diviene

$bm : b = dm : d$

E invertendo $b : bm = d : dm$

Prod.o degli estremi bdm, dei medj bdm.

Questo genere d'argomentare, si dice: inversion della ragione.

Teorema IV.

Se sieno quattro proporzionali ancora paragonando gli antecedenti e conseguenti fra loro, similmente saranno i termini proporzionali.

Sia $a : b = c : d$ A

Dico che sarà ancora $a : c = b : d$ B

Fatta la sostitud.e in A diviene

$bm : b = dm : d$

E paragonando $bm : dm = b : d$

Prodotto degli estremi bmd, dei medj bmd.

Per numeri

Sia $12 : 4 = 6 : 2$

Dunque $12 : 6 = 4 : 2$

Dicesi alternazione

Teorema V

Se sia $a : b = c : d$ — A

sarà ancora $a+b : b = c+d : d$

Fatta la sostituzione in A diviene

$bm : b = dm : d$

Dunque aggiungendo, come sopra

$bm+b : b = dm+d : d$

Prodotto degli estremi $bmd + bd$

Prodotto dei medj $bmd + bd$

Per numeri

Sia $12 : 4 = 6 : 2$

Dunque $16 : 4 = 8 : 2$

Il tal genere di argomentare

dicesi composizione.

Teorema VI.

Se sia $a : b = c : d$ — A

sarà ancora $a-b : b = c-d : d$

Fatta la sostituz.e in A diviene

$bm : b = dm : d$

Dunque sottraendo $bm-b : b = dm-d : d$

Prodotti degli estremi bmd - bd
dei medj . bmd - bd

Per numeri

12 : 4 = 6 : 2

8 : 4 = 4 : 2

un tal genere di argomentare dicasi sottrat.^e

Teorema VII.

Se sia	$a : b = c : d$	A
Ed	$e : f = g : h$	B

moltiplicando i termini dell' una nei termini rispettivi dell' altra, saranno ancora i prodotti proporzionali, cioè

$$ae : bf :: cg : dh$$

Dimostr.^e

In A (Teor. I) $ad = bc$
e in B $eh = fg$

Dunq. (assi. 3.) $adeh = bcfg$
e però (coroll. del Teor. 2.)

$$ae : bf :: cg : dh$$ il che ecc.

Per numeri

2	6	4	12
4	8	5	10
8 :	48 ::	20 :	120

Corollario

$$2 : 4 = 3 : 6$$

Quadrati $4 : 16 = 9 : 36$

Cubi $8 : 64 = 27 : 216$

Cioè se sieno quattro proporzionali, 2:4::3:6 sono anche proporzionali i loro quadrati, i cubi, e qualunque simili potenze.

Questo genere di argomentare diessi moltiplicati.

Teorema VIII.

Se sieno quattro proporzionali, e si dividano ordinatamente per altre quattro proporzionali, saranno ancora i quoti proporzionali.

Sia $ae : bf = cg : dh$
E $e : f = g : h$

Dividendo sarà
$$a : b = c : d$$

Imperocchè se non fossero proporzionali, moltiplicati i quoti nei rispettivi divisori, non sarebbero i prodotti proporzionali, contro il supposto.

Corollario

Quindi se sieno proporzionali quattro potenze, saranno ancora proporzionali le radici simili.

Sia $4 : 16 :: 9 : 36$
sarà $2 : 4 :: 3 : 6$

Teorema IX.

L'equimoltiplici sono nella medesima ragione, che le semplici, e però fra loro proporzionali

Sieno le semplici a, b, e si moltiplichino ambidue per la medesima quantità m.

sarà $a : b = am : bm$

Prodotto degli estremi abm, dei medj abm.

Teorema X.

Le parti simili sono nella stessa ragione, che i loro tutti

Sieno i tutti a, b e si dividano ambidue per la stessa quantità m saranno le parti simili $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{m}$

Laonde $a : b = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}$

Prodotto degli estremi $\frac{ab}{m}$ dei medj $\frac{ab}{m}$

Teorema XI.

Se sieno due serie di quantità, aventi un' egual numero di termini, talmente disposti, che il primo al secondo nella prima serie sia, come il primo al secondo nella seconda serie; e il secondo al terzo nella serie prima, come il secondo al terzo nell' altra serie, e così procedendo; dico che sarà ancora il primo all' ultimo nella prima serie, come il primo all' ultimo nella seconda serie

Serie proposte a d
b e
c f

Dimostrazione

Poichè, per l'ipotesi, si ha

$$a : b = d : e$$
$$b : c = e : f$$

Sarà (teor. 7) $ab : bc = de : fe$

E dividendo per $b : b = e : e$

Sarà (teor. 8) $a : c = d : f$

il che ec.

Algebra
Ternion' IV

Per numeri

Serie date	2	1
	4	2
	6	3
	18	9

Dunque $2 : 18 = 1 : 9$

Un tal genere di argomentare si dice per l'ugualità ordinata.

Teorema XII.

Se sieno due serie costanti di un uguale numero di termini talmente disposti, che il primo al secondo nella prima serie, sia come il secondo al terzo nella seconda serie; e il secondo al terzo nella prima, come il primo al secondo nella seconda, e così procedendo; dico che sarà ancora il primo all' ultimo nella prima serie, come il primo all' ultimo nella seconda

Serie date	a	d
	b	e
	c	f

Dimostrazione

Poichè, pel supposto si ha $a : b = e : f$

$b : c = d : e$

E

sarà $ab : bc = ed : ef$

Diviso per $b : d :: e : e$

Diviene $a : c :: h : f$. il che ec.

Per numeri

2	$1\frac{1}{2}$
6	3
12	9

Dunque $2 : 12 :: \frac{3}{2} : 9$

Un tal genere di argomentare si dice per l'ugualità perturbata

Scolio

In questi Teoremi si contiene il Libro quinto degli elementi di Euclide.

Applicazione della regola
ai problemi semplici diretti, e inversi.

Se sieno due quantità a, b, e due altre c, d, e la prima a di quelle stia alla seconda b, come la prima c di queste alla seconda d, la proporzione si dice *diretta*; ma se la prima c di queste stia alla seconda d, come la seconda b di quelle alla prima a, la proporzione si dice *inversa*.

Nell'uno e nell'altro caso si trova il quarto termine; ma nel secondo, per maggiore facilità converrà invertire i termini, sicchè si avrà nel primo caso

$$a : b :: c : d$$

nel 2do caso

$$b : a :: c : d$$

S'intende però che a, b sieno omogenee e così c, d tra di loro.

Problema I

Un capitale di Ducati 804 mi ha guadagnato Ducati 201 in anni 12. Si cerca quanto mi avrebbero guadagnato in questo tempo Ducati 2436?

Poichè crescendo il capitale cresce il guadagno, e viceversa decrescendo il capitale deve decrescere ancora il guadagno; sarà la ragione dei guadagni nella ragione diretta dei capitali; onde sarà se si dica x il guad.° cercato, sarà

$$804 : 2436 = 201 : x$$

E alternando $804 : 201 = 2436 : x$

E si trova $x = \frac{2436 \times 201}{804} = 609.$

Problema II.

Con un capitale di Duc.ti 804 sonosi guadagnati Duc.ti 201 in anni 12. Ducati 2436 in quanto tempo me li avrebbero guadagnati?

Poichè crescendo il capitale, decresce il tempo, e viceversa sarà il tempo dato al tempo che si cerca nella ragione inversa dei capitali

Se dunque si chiami x il tempo cercato, sarà

$$2436 : 804 = 12 : x$$

E si trova $x = \frac{804 \times 12}{2436} = 3\frac{2340}{2436}$

Scolio

Da questa regola dipendono tutte le questioni semplici di società. Ecco un esempio

Tre fanno compagnia. Il primo mette un capitale di Ducati 130, il 2do D.ti 142, il 3o D.ti 200. Avendo guadagnato D.ti 1104, si cerca come debba farsi la divisione

Si faccia siccome 472, somma di capitali, al capitale di ciascuno, così il totale guadagno al guadagno di ciascuno.

Chiamando x il guadagno del primo, y quello del secondo, e z quello del terzo sarà

$$472 : \begin{matrix} 130 \\ 142 \\ 200 \end{matrix} :: 1104 : \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

E si trova $x = 304\frac{4}{59}$; $y = 332\frac{8}{59}$; $z = 467\frac{47}{59}$.

Se raccolti in una somma i trovati guadagni, restituiranno il comune guadagno l'operazione è da dirsi sicura.

Della proporzione Armonica e Contrarmonica

Capo III.

Definizioni.

I. Quattro quantità si dicono armonicamente proporzionali, quando la differenza tra la prima e la seconda sta alla differenza della terza, e quarta, come la prima alla quarta. Tali sono le quantità.

II. Quattro quantità poi si dicono in proporzione contrarmonica, quando la differenza tra il la prima, e la seconda stà alla differenza tra la terza, e quarta, come la quarta alla prima. Tali sono i numeri.

III. Se i termini sono tutti diversi la proporzione Armonica si dice discreta, come

Problema I.

Date tre quantità 12, 16, 9, trovare la quarta proporzionale armonica

Sia quella x

Dunque per la defin. 1. si avrà

$$12 - 16 : 9 - x = 12 : x$$

moltiplicando gli estremi, e medj

$$12x - 16x = 108 - 12x$$

cioè $-4x = 108 - 12x$

Dunque $8x = 108$

e si trova $x = \frac{108}{8} = 13\frac{1}{2}$

Probl: II.

Date due quantità 6, 8. trovare la terza proporzionale Armonica. Se si dica x

sarà $6 - 8 : 8 - x = 6 : x$

moltiplicando gli estremi, e medj

$$6x - 8x = 48 - 6x$$

cioè $-2x = 48 - 6x$

E trasponendo $4x = 48$

e si trova $x = 12$

Probl. III.

Date due quantità 4, 6 trovare la media proporzionale armonica.

Sia quella x

Dunque $4 - x : x - 6 = 4 : 6$

moltiplicando gli estremi, e medj

$$24 - 6x = 4x - 24$$

Riducendo diviene $10x = 48$

E si trova $x = 4.8$

Risoluzione universale de' tre problemi precedenti.

Probl. I.

Sia $12 = a$, $16 = b$, $9 = c$; ora la quarta armonica che si cerca $= x$

Sarà $a - b : c - x = a : x$

Moltip. estr. e medj

$$ax - bx = ac - ax$$

Trasponendo $-ax$

$$ax + ax - bx = ac$$

E si trova $x = \dfrac{ac}{2a - b}$

Probl. II.

Sia $6 = a$, $8 = b$, con la terza proporz.e armonica x

sarà $a - b : b - x = a : x$

moltip. estr. e medj

$$ax - bx = ab - ax$$

Trasponendo $ax + ax - bx = ab$

cioè $2ax - bx = ab$

e divid.o $x = \dfrac{ab}{2a - b}$

Probl. III.

Sia $4 = a$, $6 = b$, con la media armonica x

sarà dunque $a - x : x - b = a : b$

moltip. estr. e medj

$$ab - bx = ax - ab$$

Trasponendo $2ab = ax + bx$

Dividendo $x = \dfrac{2ab}{a + b}$.

Scolio

Per trovare la quarta proporz.e contrarmonica si fa un' equazione di secondo grado, come si spiegarà a suo luogo.

Capo IV

Delle ragioni, e proporzioni composte

Definizioni.

1. Quando due quantità crescono, o decrescono secondo due, o più rapporti, si dice che crescono o diminuiscono nella ragione composta dalle ragioni di esse componenti.

Così se 1. grado di forza muove una mole di 1. peso, per muovere una mole d'un doppio peso, si ricerca una forza doppia; tal proporzione si dice in ragione semplice: ma se oltre il peso, si dea aumentare ancora la velocità, e sia, per esempio tripla, allora si ricerca una forza sestupla, e questa dicesi in ragione composta.

Onde ne risulta una regola, che per determinare la ragione di due quantità fra loro crescenti, o decrescenti secondo più quantità, si dovranno prendere i prodotti di queste quantità.

Coroll. 1

Laonde se sieno due quantità m, x e queste dipendano da più quantità simili A, B, C, a, b, c, sarà

$$ABC : abc :: m : x$$

cioè m sta ad x, come ABC ad abc, ragione composta delle quantità A, B, C, ed a, b, c da cui dipendono.

Coroll. II.

Laonde se sieno più ragioni $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}$ la loro ragione composta sarà $\frac{aceg}{bdfh}$, cioè la ragione dal prodotto degli antecedenti al prodotto de conseguenti

Ovvero se sia
$$\begin{matrix} a : b \\ c : d \\ e : f \\ g : h \end{matrix}$$
moltiplicando fra loro tanto gli antecedenti, quanto i conseguenti si avrà $aceg : bdfh$, cioè $\frac{aceg}{bdfh}$, come prima, ch'è la ragione composta di esse quantità

Coroll. III.

Quando si moltiplichi la ragione composta $\frac{aceg}{bdfh}$, le componenti saranno $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}$

II. La composta $\frac{aa}{bb}$ di due ragioni uguali $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$ ovvero $a:b$, $a:b$ dicesi duplicata della ragione $a:b$, e la composta $\frac{aaa}{bbb}$ di tre ragioni uguali $a:b$ $a:b$ $a:b$ dicesi triplicata della ragione $a:b$ &c.

Coroll. I.

Quindi ne segue, che la duplicata $\frac{aa}{bb}$, ovvero $aa : bb$ è la stessa ragione, che hanno i quadrati de' termini di $\frac{a}{b}$ e la triplicata $\frac{aaa}{bbb}$ è la medesima con la ragione che hanno fra loro i cubi de termini di $\frac{a}{b}$

Coroll. II.

All'incontro $\frac{a}{b}$ si dice subduplicata dalla ragione della sua composta $\frac{aa}{bb}$, ed è, come la radice quadrata dei termini di $\frac{aa}{bb}$ similmente $\frac{a}{b}$ si dice subtriplicata dalla ragione di $\frac{aaa}{bbb}$, la qual'è, come la radice terza dei termini di $\frac{aaa}{bbb}$, e così procedendo.

Teorema.

Se sia $\div\!\div$ a, b, c, d, e, f ....
in continua proporzione geometrica, sarà il primo termine a al terzo c nella ragione duplicata del primo al secondo b, cioè come i loro quadrati. Il primo al quarto nella ragione triplicata dal primo al secondo, cioè come il cubo del primo al cubo del secondo, il primo al quinto, come il quadrato quadrato del primo al quadrato quadrato del 2do. &c.

alle due prime a, b si trovi la terza proporzionale x. Sarà $a : b = b : x$, e si trova $x = \frac{bb}{a}$, Di nuovo alle b, $\frac{bb}{a}$ si trovi la terza, e così trovasi ~~onde~~ la serie diviene $\div a ; b , \frac{bb}{a} . \frac{b^3}{a^2} . \frac{b^4}{a^3} . \frac{b^5}{a^4}$ .... in cui il primo termine a sta al terzo $\frac{bb}{a}$, come $aa : bb$, cioè nella ragione duplicata del primo al secondo. il primo a al quarto $\frac{b^3}{a^2}$ ovvero $\frac{bbb}{aa}$, come $aaa : bbb$, cioè nella ragione triplicata del primo al secondo; il primo a al quinto $\frac{b^4}{a^3}$ nella ragione quadruplicata, e così di seguito.

Scolio

Dell'uso di questo teorema si valsero tra due quantità date a ritrovare quante medie proporzionali si vogliono tra due quantità proposte. Per l'invenzione di due medie si risolve il problema Deliaco, si fa la regola detta del calibro, etc. come a suo luogo si spiegarà

Applicazione dell'aurea regola ai problemi composti

Problema I.

Al nutrimento di 100 uomini per un tempo 4 il dispendio è 3000. Al nutrimento di uomini 240, per un tempo 10, quale sarà il dispendio?

Avverto che il dato dispendio è al dispendio cercato nella ragione diretta degl'uomini, e dei tempi, perciò posti gli uomini 100 $= u$, uomini 240 U, il tempo $4 = t$, il tempo $10 = T$, il dato dispendio $= d$, il dispendio cercato $= D = x$, sarà

$$\begin{array}{l} u : U \\ t : T \end{array} :: d : x$$

Dunque componendo

$$ut : UT = d : x$$

Moltiplicando estremi, e medj

$$utx = UTd$$

$$x = \frac{UTd}{ut}$$

E sostituendo $x = \frac{240 \cdot 10 \cdot 3000}{100 \cdot 4} = \frac{7200000}{400} = 18000.$

Coroll. II.

Un mobile ha percorso miglia 100 con una velocità di 4 gradi in giorni 24. Si cerca con quale velocità avrebbe percorso uno spazio di miglia 130 in giorni 15?

Sia la velocità cercata $= V = x$, la velocità data $4 = v$; il tempo $24 = T$, il tempo $15 = t$, lo spazio $100 = s$; lo spazio $130 = S$, essendo le velocità nella ragione diretta dei spazj, e nella rag. inversa dei tempi, sarà

$$\begin{array}{lll} s & : & S \\ t & : & T \end{array} \quad :: \quad v : x$$

E componendo $st : ST :: v : x$

Moltiplicando gli estremi, e medj

$$stx = STv$$

E dividendo $x = \frac{STv}{st} = \frac{130 \cdot 24 \cdot 4}{100 \cdot 15} =$

Scolio

Da questa regola di tre composta dipende la regola di società composta in ragione di capitali, e di tempo.

Esemp.

Esempio

Tre hanno posto a traffico insieme Scudi 1104 per anni 2. Il primo pose Scudi 306 per tutto il detto tempo, il secondo 408 per mesi 16, il terzo Scudi 390 per mesi 10. Avendo guadagnato Scudi 1000, si cerca il guadagno di ciascuno

Si moltiplichi ciascun capitale nel suo tempo: indi si faccia; siccome la somma de' prodotti al totale guadagno, così il prodotto composto di ciascuno al suo guadagno, come in figura

Guadagno del primo x, del 2do. y. del 3zo z

capli		mesi		Prodotti
306	×	24	=	7344
408	×	16	=	6528
390	×	10	=	3900
				17772

$$17772 : 1000 :: 7344 : x = 413\tfrac{347}{1481}$$
$$6528 : y = 367\tfrac{473}{1481}$$
$$3900 : z = 219\tfrac{661}{1481}$$

somma 1000:–

Che se alcuno de' compagni aggiunga, o levi qualche porzione dal capitale contribuito, dovrà

ciascuna porzione del detto capitale moltiplicarsi nella porzione del tempo, in cui è stato a traffico, e la somma de' prodotti sarà tutto il prodotto composto di quello che avesse levato, o aggiunto qualche parte del suo capitale. Del resto si operi come sopra.

Esempio

Tre associati fanno compagnia per due anni. Il primo mette Scudi 200; il 2do. Scudi 120, ma questo in capo a mesi 8 ne aggiunse altri Scudi 30: il 3zo pose Scudi 300, e questi in capo a mesi 10 ne levò 150. Avendo guadagnato Scudi 2000, si cerca il guadagno di ciascuno

$$200 \times 24 = = = = 4800$$

$$\left.\begin{array}{l} 120 \times 8 = 960 \\ 150 \times 16 = 2400 \end{array}\right\} = 3360$$

$$\left.\begin{array}{l} 300 \times 10 = 3000 \\ 150 \times 14 = 2100 \end{array}\right\} = 5100$$

Somma 13260

Ora se la parte del 1mo si dica x, del 2do. y, del 3zo z sarà

$$13260 : 2000 :: 4800 : x = 723\tfrac{217}{221}$$

$$:: 3360 : y = 506\tfrac{174}{221}$$

$$:: 5100 : z = 769\tfrac{51}{221}$$

Somma 2000:—

CAPO V.

Delle Frazioni e loro calcolo.

Definizioni

1. La frazione è una quantità minore dell'unità, e si esprime per la ragione o rapporto che ha all'unità.

Così se la quantità s'intenda divisa in tre parti uguali, saranno due di queste all'unità, come 2 a 3, cioè $\frac{2}{3}$ parti dell'unità.

2. Il numero 2 sopra la linea si dice Antecedente, o Numeratore, perchè numera le parti, che attualmente si prendono dall'unità, l'altro 3 sotto la linea divisoria dicesi Conseguente, ovvero Denominatore, perchè denomina il numero delle parti uguali, in cui l'unità medesima si divide.

Quindi ne segue, che se due quantità si riferiscano nello stesso modo all'unità, esse quantità saranno uguali. così $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ sono uguali; imperocchè $2 : 3 :: 4 : 6$, in cui il prodotto degli estremi uguaglia il prodotto de' medj.

3. Talvolta si esprime la stessa unità in forma di frazione, come se sia $\frac{1}{1}$, $\frac{12}{12}$, $\frac{a}{a}$, $\frac{ab}{ab}$, talaltra una quantità anco maggiore dell' unità, come se abbiasi $\frac{12}{4} = 3$; $\frac{60}{15} = 4$: Tali frazioni poi si dicono <u>improprie</u>, ovvero <u>spurie</u>.

Teorema.

Non si muta il valore d'una frazione, se si moltiplichino, o dividano ambi i termini per una medesima quantità.

Parte I. ~~Im~~ Sia data la frazione $\frac{a}{b}$, e si moltiplichino ambi i termini per m, sarà $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$

Imperocchè (Teor. 9 (2.S.2) le equimoltiplici sono nella ragion medesima delle semplici, onde essendo $am : bm :: a : b$, sarà ancora $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$

Parte II. Sia $\frac{ac}{bc}$, e si dividano ambi i termini per c, si avrà $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. Imperocchè (Teor. 10. S. 2. C. 2) le parti simili a, b sono nella ragione dei loro tutti ac, bc

Lemma.

Dati due numeri fra loro composti 2079. 2772 trovare il massimo loro divisore.

Si divida il maggiore pel minore, e senza curare il quoto, si divida il minore pel residuo primo, indi il residuo primo pel secondo dipoi il secondo pel terzo, e così procedendo, finchè si esaurisca la divisione l'ultimo divisore sarà il massimo divisore, cioè la massima comune misura cercata

Siano dati i numeri 2772, 2079.

Operazione I.

Numero maggiore	2772	= 1. Quoto I.
Numero minore	2079	
Residuo I.	693	

Operaz.^e II.

Numero minore	2079	= 3. Quoto II.
Divisore residuo I.	693	
Prodotto	2079	
Residuo II.	0	

Massimo dunque comune divisore 693.

Scolio

Se operando giusto il metodo indicato dopo qualche sottrazione resta l'unità 1, è indizio, che tali numeri sono fra loro primi; cioè non ammetteranno alcun numero, che sia divisor' comune.

Problema I.

Data una frazione, i cui termini siano numeri fra loro composti, ridurla a minimi termini.

Sia data la frazione $\frac{2079}{2772}$

Si trovi il massimo comun divisore de' numeri 2079, 2772, il quale, pel Lem. precedente è 693. Divisi dunque ambi i termini per 693, risulta la frazione $\frac{3}{4}$, la quale, pel Lem. premesso, è uguale alla data, ed a minimi termini ridotta, come si cercava.

Questa riduzione per ordinario si fa per più parti, come si è spiegato nell' Aritm.ca volgare.

Se le frazioni siano letterali, si fa la riduzione cancellando le lettere comuni all' uno, e all' altro termine. Così se abbiasi $\frac{aabb}{aabcd}$, ridotta diviene $\frac{b}{cd}$. Similmente, se sia $\frac{ab}{abdf}$, ridotta diverrà $\frac{1}{df}$.

Problema II.

Ridurre una data quantità in frazione spuria di una data denominazione.

Sia a la proposta quantità, e il denominatore, che esprima le parti in cui vuolsi ridursi, sia m. Si avrà $\frac{a \times m}{m}$; cioè $\frac{am}{m}$. salvo il di lei valore. Imperocchè, una quantità moltiplicata, e divisa per una medesima quantità resta invariata.

Scolio. Con tal metodo si riduce il tutto nelle sue parti, denominate dal dato denominatore.

Probl. III.

Ridurre la frazione spuria all'intero

Sia la quantità $\frac{65}{5}$. Riducendo questa divisione, sarà l'intero che si cerca 13.

Parimenti se sia $\frac{12aabc}{3abc}$, sarà l'intero cercato $4a$, com'è chiaro.

Scolio. Questo metodo è il converso del precedente, però col presente le parti si riducono al tutto.

Probl. IV.

Trammutare una frazione di una data denominazione in altra, salvo il di lei valore.

Sia data la frazione $\frac{2}{3}$, da ridursi in frazione, il cui denomin.re sia 12.

Per investigare il metodo analiticamente sia x il numeratore cercato; ~~sarà~~ Perchè dunque la nuova frazione $\frac{x}{12}$ dee essere uguale alla data, si avrà l'equaz.e $\frac{x}{12} = \frac{2}{3}$, la quale risolta diviene $x = 8$; sarà dunque la frazione cercata $\frac{8}{12}$.

Scolio. Si fa uso di questo metodo per conoscere il valore delle frazioni di denominazione strana, ed inusitata, riducendole, per questo problema, in altra uguale di denomin.re nota, ed usitata.

Universalmente

Sia $\frac{2}{3} = \frac{a}{b}$, $12 = m$; il numeratore cercato x.

Si avrà $\frac{x}{m} = \frac{a}{b}$, la quale risolta

si trova $x = \frac{am}{b} = \frac{24}{3} = 8$

Cioè, bisogna moltiplicare il numerat.e della data fraz.e nel dato denom.re e il prodotto dividerlo [illegible] denom.re della data fraz.e

Problema V.

Ridurre più frazioni di diversa specie, ad una sola frazione

Sieno date $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$

I. Si moltiplichi il numeratore della seconda (incominciando verso destra) nel denominatore della prima, al prodotto aggiungasi il numeratore della prima, la somma sarà il numeratore d'una nuova frazione equivalente alle due prime, il cui denominatore, e il prodotto dei loro denominatori.

II. Questa frazione si riduca nello stesso modo con la terza, indi con la quarta etc. e si avrà la frazione cercata.

Sieno date le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$

Ridotte le due prime divengono $\frac{cf+e}{df}$

E ridotta questa con la terza si ha $\frac{adf+cf+e}{bdf}$

Scolio

Serve questo metodo per determinare qual parte dell'unità sieno più rotti, di cui il secondo è parte del primo, il terzo parte del secondo, etc.

Algebra
Ternion V.

Così, se si cerchi qual parte di Tallero siano lire 8, Sol. 16. Den. 6, ovvero $\frac{8}{10}.\frac{16}{20}.\frac{1}{2}$, Fatta $\frac{8}{10}=\frac{a}{b}$, $\frac{16}{20}=\frac{c}{d}$, $\frac{1}{2}=\frac{e}{f}$, applicata la formula preced.te sarà

$$\frac{adf+cf+e}{bdf}=\frac{8.20.2+16.2+1}{400}=\frac{353}{400}$$

Ma quando sono riducibili infilzate le due prime potranno sempre esprimersi a un' espressio.. più semplice, e così di mano in mano sino all' ultima, benchè in il contrario insegni il Figatelli.

Problema VI

Ridurre le frazioni alla medesima Denominazione

I. Si moltiplichi il numeratore di ciascuna nei denominatori delle altre, e si avranno i rispettivi numeratori.

II. Si moltiplichino fra loro tutti li Denominatori, e si produrrà un denominator comune.

Sieno prima due frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$

Ridotte divengono $\frac{ad,\ bc}{bd}$

Sieno poi quantunque $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{f}{g}$, $\frac{h}{m}$

Ridotte divengono

$$\frac{adfgm,\ bcfgm,\ bdegm,\ bdffgm,\ bdfgh}{bdfgm}$$

nè si muta il loro valore: imperocchè l'equimoltiplici sono nella stessa ragione delle semplici.

Problema VII.

Determinare la ragione che hanno le frazioni fra di loro.

Si riducano alla medesima denominazione (probl. 6to), e saranno fra loro come i loro numeratori.

Così le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, saranno fra loro come ad a bc

Parimenti $\frac{1}{m}$, $\frac{c}{f}$ sono come $f : cm$

e così delle altre.

Problema VIII.

Aggiungere frationi

I. Se hanno denominatori diversi si riducano alla medesima denominatione.

II. Si aggiungano i numeratori, e alla somma si sottoscriva il denominatori comune interposta la linea di divisione

III. Se la fratione riesce spuria, si riduca (probl. 3.) all' intero.

Sieno le frationi $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$

Ridotte divengono $\frac{15,\ 20,\ 24}{30}$,

la cui somma è $\frac{59}{30}$ e la somma ridotta $1\frac{29}{30}$.

Universalmente.

Sieno d'aggiungersi $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sarà la loro somma $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$.

Ma possono anche ridursi. così la somma ridotta sarà $\frac{ad+bc}{bd}$.

Probl. IX.

Sottrarre fraz.ⁱ

Da $\frac{10}{11}$ sottrarre $\frac{4}{7}$

Ridotte alla medesima denominazione

divengono $\frac{70,\ 44}{77}$.

la cui differenza è $\frac{26}{77}$.

universalmente

Dalla frazione $\frac{a}{b}$ debba sottrarsi $\frac{c}{d}$.

sarà la differenza $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$

ma possono anche ridursi alla medesima denominaz.ᵉ il che fatto, sarà la differenza ridotta $\frac{ad - bc}{bd}$.

Problema X.

Moltiplicare frazioni.

Sia $\frac{2}{3}$ da moltiplicarsi in $\frac{4}{5}$

Per trovare il metodo analiticamente, pongasi $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$; $\frac{4}{5} = \frac{c}{d}$, e sia $\frac{a}{b} = x$; $\frac{c}{d} = y$. così si avranno

due equazioni, le quali sciolte dalle frazioni, sarà

la prima $bx = a$

l'altra $dy = c$

e moltiplicate fra loro, sarà (ass. 3.)

$$bdxy = ac$$

e divid. per bd da una parte, e dall'altra risulta $xy = \frac{ac}{bd}$, nel caso nostro, $= \frac{8}{15}$.

cioè si deono moltiplicare fra loro tanto li numeratori, quanto i denominatori. e la ragione di questi prodotti, è il prodotto, che si cerca.

Lo stesso metodo sarà se le date frazioni siano più di due.

Probl. XI.

Dividere frazioni

sia $\frac{a}{b}$ da dividersi per $\frac{c}{d}$

Per trovare il metodo Analiticamente, sia $x = \frac{a}{b}$; $y = \frac{c}{d}$

Tolte le divisioni diviene la prima

la prima $bx = a$; l'altra

l'altra $dy = c$.

si moltiplichi ciascuna pel denominatore dell'altra frazione, diverrà

la prima $bdx = ad$

l'altra. $bdy = bc$

E dividendo ~~un~~ l'equazione prima per la seconda, risulta (Ass. 4.) $\frac{x}{y} = \frac{ad}{bc}$, cioè bisogna moltiplicare il numeratore della frazione che si vuol dividere nel denominatore della dividente, e la ragione di questi prodotti è il quoto cercato.

Probl. XII.

Innalzare una frazione alla data potenza

Si elevi al dato grado tanto il numeratore quanto il denominatore, il che si ottiene, moltiplicando una, o più volte la frazione in se stessa

Sia la frazione $\frac{a}{b}$

se vogliasi il quadrato sarà $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb}$

se il cubo $\frac{aa}{bb} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb}$

se il biquadrato $\frac{aaa}{bbb} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaaa}{bbbb}$. ec.

Probl. XIII.

Da una data potenza estrarre la proposta radice.

Siccome, per formare una potenza proposta si dee moltiplicare in sè stesso tanto il numeratore quanto il denominatore, così per estrarre la radice proposta, conviene cavarla da ciascun termine.

Sia $\frac{aaaa}{bbbb}$ la data potenza

Se vogliasi la radice seconda, ella sarà

$$\sqrt{\frac{aaaa}{bbbb}} = \frac{aa}{bb}.$$

Se la terza ~~[illegible]~~ di $\frac{aaa}{bbb}$ sarà

$$\sqrt[3]{\frac{aaa}{bbb}} = \frac{a}{b}.$$

Scolio. Se la quantità da cui si dee estrarre la radice non è potenza perfetta per ora basta indicarla col segno $\sqrt{\ }$. Se la quantità è numerica si determina [illegible] la regola di approssimazione, e coll'uso delle decimali, e generalmente colla formula Newtoniana, come si spiegherà a suo luogo.

Problema XIV.

Ridurre la frazione di frazione a frazione semplice.

Essendo la frazione parte d'altra frazione, essa si riduce a semplice frazione pigliando tal parte dalla rispettiva frazione, il che si ottiene multiplicando fra loro tanto li numeratori, quanto li denominatori, come si è spiegato al problema X.

Così se sia $\frac{2}{3}$ di $\frac{1}{20}$, sarà la frazione semplice $\frac{2}{60}$, ovvero $\frac{1}{30}$

Parimenti, se abbiasi $\frac{1}{m}$ di $\frac{p}{q}$ riducendo a frazione semplice, si avrà $\frac{p}{mq}$.

Nello stesso modo si riducono le frazioni di frazioni di frazioni, etc.

Per computare dunque le frazioni di frazioni, conviene prima ridurle a semplici frazioni, indi si trattino per tutti gli atti dell'Algorismo, giusto il metodo spiegato.

Scolio. Se alle frazioni vanno congiunti interi, si esprimano, questi pure in forma

di frazione, sottoscritta per denominatore l'unità, indi si aggiungono o si sottraggono, come le stesse frazioni, e si avrà la quantità cercata.

Delle frazioni Decimali

Capo VI.

Dicesi Decimale quella frazione che avendo qualunque numero per numeratore ha per denominatore l'unità seguita da uno o più zeri, come $\frac{3}{10}$, $\frac{14}{100}$, $\frac{104}{1000}$, etc.

Ma perchè nelle operazioni che si fanno con le Decimali si sopprimono i denominatori, così conviene, ove il loro denominatore è dato [illegible] di aggiungere [illegible] numeratore [illegible] tanti zeri [illegible] di tante figure [illegible] denominatore meno un punto [illegible]. Così

$\frac{4}{10}$ eguaglia .4 ovvero 0.4

$\frac{7}{100}$ eguaglia .07 ovvero 0.07

$\frac{14}{1000}$ eguaglia .014 ovvero 0.014

$\frac{10[illegible]}{100000}$ eguaglia .0010[illegible], ovvero 0.0010[illegible]

Problema I

Ridurre un dato numero in fra-
zione decimale

Sia il numero 5

[illegible] ridurre alle decime [illegible] si [illegible] [illegible] aggiungendo un zero, [illegible] il [illegible] sarà 50

[illegible] alle centesime [illegible] 00 [illegible] aggiungendo due zeri, e troverà 500, e con [illegible]

Problema II

Ridurre una frazione volgare in
frazione decimale.

[illegible] un zero al dato numeratore e il prodotto si divida pel denominatore il quoto sarà la prima [illegible] lo resto si faccia [illegible] [illegible] e si avrà la frazione cercata

Sia da ridurre $\frac{7}{8}$

Operazione

70 (frazione decimale 875
60
40

Non qualunque frazione può essere ridotta esattamente [illegible] si conosce quando la figura [illegible] nel medesimo ordine come $\frac{1}{3}$ sarà .33333333 ecc. [illegible] se ne [illegible] ottengono [illegible] o ne decimali, [illegible]

l'esigenza di una maggiore o minore [illegible], e aumentando in questo caso d'un' unità l'ultima [illegible] se il residuo eccede sensibilmente la metà del divisore, come vedremo in pratica.

Problema III.

Ridurre le frazioni decimali alla medesima denominazione

Si aggiungano alle frazioni del minor denominatore alquanti zeri verso destra, sicchè tutte constino del medesimo numero di figure.

Siano date le frazioni

.43072   .207   .14   .6

Ridotte divengono

.4307[illegible]   .20700   .14000   [illegible]

Problema IV.

Aggiungere frazioni decimali

Si riducono per prima precedentemente alla medesima denominazione, indi si aggiungono [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] la [illegible] degli [illegible], se pure ne risulterà alcuno col solito punto.

Ovvero che torna lo stesso, si scrivano le decime sotto le decime, le centesime sotto le centesime ecc. indi si operi come si è detto.

Esempio

Esempio

Siano d'aggiugnere

.3 .27 .704 .200308

Si scriva .3

.27

.704

.200308

[illegible] 1.47[illegible]08

Se alle frazioni saranno uniti interi, sarà lo stesso metodo

Problema V

Sottrarre frazioni decimali

Si operi con la regola del probl. precedente non essendo altro divario, che in vece di aggiugnere, si sottra un numero dall' altro

Ecco un Esempio.

Da .73 sottrarre .2043

Si scriva .73

.2043

Differenza .5257

Se alle frazioni vanno congiunti interi, sarà la medesima regola

Esempio

Da 340.520 sottrare 140.83079

si scriva 340·520
140·83079

Differenza 199·68921

Problema VI.

Moltiplicare frazzioni decimali

Si moltiplicheno fra loro come gli interi, premet-tendo al prodotto il solito punto.

Esempio

Sia da moltiplicarsi .2104
per .123

6312
4208
2104

Prodotto cercato .0258792

Si deve però avvertire che il prodotto costi di al-trettante figure, quante ne hanno i moltiplicanti insieme.

Se con le frazioni siano interi vi ha luogo la medesima regola.

Esempio.

Moltiplicare 1·1043
per .124

44172
22086
11043

Prodotto 0·136932

Arma

Altro esempio

43.75	
124	
17500	
8750	
4375	
5425.00	

Problema VII

Dividere frazioni decimali

I. Si riducano prima alla medesima denominazione coll'aggiunta degli occorrenti zeri giusta il probl. 3

II. Si divide poi la frazione dividenda per la divisore, e [illegible] il quoto.

III. Al residuo se pur ven'ha alcuno, si aggiungano alquanti zeri onde avere un sufficiente numero di decimali, le quali si scriveranno dopo il punto cioè si riduca la frazione residua in decimale a questo la regola del [illegible]

Esempio

Sia da dividersi .87 per .1034

Ridotta alla stessa denominazione, sarà da dividersi .8700 per .1034 e sarà il quoto 8.414

Prova

Operazione

8700 – Quoto
034 (8.414

8272
–4280
: 334.
4130
–1440
: 034
–1060
1034
3102
735

[illegible] intendendo di [illegible] alla [illegible] decimale
o posto 4 in vece di 3 per la ragione addotta, a [illegible]
[illegible]

[illegible] alla [illegible] il divisore
non si contiene nel dividendo, allora il quoto sarà una
frazione da ridursi in decimale, come si è detto

Esempio

Sia da dividersi · 2304 per · 7 ·

Ridotte divengono · 23041 a · 7000

Perchè dunque il divisore · 7000 non si contiene nel
dividendo, sarà il quoto $\frac{2304}{7000}$, la qual [illegible]
dotta in decimale diviene · 3031 · · · Caso

Siano

[illegible]

22040	Quoto
100	2031 . . . . &c.
2220	
2400	
00	
24	
120	
70	

[illegible] nelle quali vanno congiunte [illegible] si opera col medesimo metodo

[illegible] dei dividendi 12 4, per 6.045

Ridotte divengono 12.400, a 6.045

Ora dividendo 12·400 per 6.045 si avrà per quoziente 2.0519 . . . . &c come segue in figura.

Operazione.

12400	Quoto
6045	2.0519 . . . . &c.
12090	
31400	
30215	
11850	
6045	
58070	
6043	
54357	
3183	

[illegible]

[illegible]

Come è vero ciò [illegible], per mezzo dei decimali [illegible] la riduzione [illegible] anche ottenimmo per determinare prossimamente le radici irrazionali o sorde.

Sia dunque una quantità incognita per aver la radica quadrata si aggiungeranno alla medesima copia di zeri quante cioè note decimali si vorranno estrarre nella radica, come si è detto nei numeri, si separeranno col solito punto verso destra altrettante decimali mantenendo la copia o più a dopo aggiunti zeri, [illegible] il [illegible]

Esempio

Sia il numero 3 da cui dovrà estrarsi la radica a tre decimali

Operazione

Formula algebrica $a^2 + 2ab + b^2$

```
3.00.00.00      Radica
1               1.73
―――――
200
 27
189
1100
 343
1029
―――――
  71            [illegible]
```

Resto 7100
3462
0524
———
170

Radice 1.732

La prova si fa moltiplicando insieme i pezzi e al risultato aggiungere il residuo, come in figura.

Operazione.

Prodotto primo	1
2do	189
3zo	10.29
4to	59 14
Prodotti insieme	2.99[illegible]
Residuo	170

Somma totale. 3000000

Per estrarre poi la radice dalle frazioni, i cui termini sono, o ambidue ovvero l'uno o l'altro, numera incertitte, ecco la regola.

1mo si moltiplichi il numeratore nel denominatore, e al prodotto aggiunta alquante copie di zeri, e si estragga la radice nel modo sopra indicato.

2° la radice trovata si ritornerà [illegible] di [illegible] [illegible]

3zo [illegible] è [illegible] [illegible]

intero, aumentando le decimali così [illegible].

Esempio

Sia $\frac{2}{3}$ di cui si debba estrarre la radice quadrata

Moltiplico 2 per 3 e al prodotto [illegible] fra [illegible] aggiungo la coppia di zeri nell'estrarre la radice, e divido [illegible] per tre [illegible] 816 millesimi

Operazione

```
6.00.00.00 ... ( Radice
4              (  2 4 4 9
200
 44
 70
-2400
  484
 1916
 -46400
   4889
 44001
 -2399
```

Divido la radice 2.449 per 3 e il quoto .816 cioè 816 millesimi sarà la radice cercata.

[illegible] il residuo 2399 [illegible] la metà del doppio di [illegible] la radice trovata 2.449 si troverebbe aumentare [illegible] figura [illegible] unità

Per la radice cubiche negli interi s'aggiungono ai quanti numeri Decimali [illegible] e quindi come se [illegible] l'operazione per le nove decimali quanti sono i numeri degli aggiunti zeri

Esempio

Sia il numero 1403 da cui debbasi estrarre la radice cubica approssimata.

Per due Decimali aggiungo sei zeri, e si avrà 1403000000, da cui estratta la radice cubica risulta 11.19

Operazione.

Formula algebrica $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

1.403.000.000 (Radice 11.1

1

-403

3

1

3

3

1

331

[illegible] 72000

303

1

303

33

1

36331

Resto [illegible] 3569000

...rento 35307000 (Radice 11.19

309603
9
3326067
20973
729

33537159

Resto ultimo 1831841 da ...

Prove

Prodotto primo 1

" 2do 331

" 3zo 36[illegible]21

" 4to 33537159

I prodotti summano 1033[illegible]159

Aggiungo il residuo 1831841

Total summa [illegible]

Prodotto primo 1

" 2do 331

" 3zo 36601

" 4to 33537159

I prodotti summano 1401158159

Aggiungo il residuo 1831841

Total summa 1403000000

Per estrarla dalle frazioni prima si moltiplichi il numeratore nel quadrato del denominatore, e si-ando dal prodotto aumentato di quanti ternarj di zeri si vorrà, estraggasi la radice cubica giusta il metodo precedente. Dipoi la radice trovata dividasi pel denominatore della data frazione, e quoto sarà la radice cubica cercata.

Sia data la frazione $\frac{4}{5}$

Operazione

25
4
100.000.000.000 Radice
64 Somma [illegible]
36000 4.[illegible]
48
6
288
432
216
[illegible]
somma sott.^a [illegible]
20[illegible]4000
[illegible]48
4
[illegible]12
[illegible]
64

somma sott.^a 256[illegible]44

[illegible]

[illegible]

Sum[illegible]

[illegible] 1° [illegible] 64

[illegible] 33036

[illegible] 57° 2561244

prodotti sommano 9897344

aggiungo il resid.° 102656

Summa totale 10000000

Ora divido 464 per 5

Quoto $\frac{464}{500}$, la qual ridotta in Decimale

si ha .928 cioè $\frac{928}{1000}$ radice carrata

come in figura

Operazione.

```
4640   ( Quoto
 500   (  928
450
-140
 100
  400
  400
   0
```

Annotazione I.

Si debba estrarre la radice da un numero

misto, come $4\frac{2}{3}$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] $\frac{14}{3}$, indi si [illegible] come si è indi

cato

Sum[illegible]

Annotazione M.

Se il numero 102656 eccedesse la metà del quadrato della radice + 64, più in cerca radice dovevasi aumentare l'ultima cifra 4, d'un' unità

Algebra

Ternion VI.

Del calculo delle
ossia della Potenze per gli Esponenti

Capo VII.

Si dicono *cognate* quelle potenze Aritmetiche, che si generano da una medesima radice, come dalla radice a, ovvero b, etc.

Per agevolare l'espressione, e quindi il calculo, in vece di scrivere aa, si pone a^2, in vece di aaa, si fa a^3, posto sopra la quantità Algebraica l'indice, che esprima la dimensione di essa quantità.

Il numero sopra la quantità letterale, si dice *Esponente* ovvero *Logaritmo* della medesima quantità.

Problema I.

Aggiungere le potenze Aritmetiche per gli esponenti.

Se hanno il medesimo esponente, si riducano ad un sol termine, altrimenti si congiungano col segno +

Sieno d'aggiungere a^2, $3a^2$, $7a^2$
sarà la prima somma $a^2 + 3a^2 + 7a^2$.
E la somma ridotta $11a^2$.

Sieno poi a^3, a^5, $2a^7$.
Sarà la loro somma $a^3 + a^5 + 2a^7$.

Sieno in terzo luogo $3a^4$, $9a^4$, $8a^{16}$.
Sarà la prima somma $3a^4 + 9a^4 + 8a^{16}$
E la ~~ta~~ somma ridotta $12a^4 + 8a^{16}$.

Probl. II.

Sottrarre le Potenze Aritmetiche
pei loro Esponenti.

Che hanno i medesimi esponenti si riducano ad un solo termine, altrimenti si congiungano col segno —

Da $3a^3$ si debba sottrarre $2a^3$
sarà la differenza prima $3a^3 - 2a^3$.
E la differenza ridotta a^3.
Da $4a^5$ sottrarre $2a^3$
sarà la differenza $4a^5 - 2a^3$, la qual' è irreducibile.

Problema III.

Moltiplicare le potenze per i loro esponenti

Poichè l'esponente indica quante volte dovrebbe porsi la quantità affetta dall'esponente per avere il loro prodotto basta ~~a~~ aggiungere gli esponenti, e la loro somma soprascritta alla quantità letterale sarà il prodotto, che si cerca

Esempi.

$a^3 \times a^5 = a^8$ | $a^3 \times a^8 = a^{11}$

$a^6 \times a^3 = a^9$ | $a^2b^4 \times a^3b^5 = a^5b^9$

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ | $a^3c \times a^3c^7 = a^6c^8$.

Probl. IV.

Dividere le potenze per gli esponenti.

Dall'indice del dividendo sottraggasi l'indice del divisore, il residuo soprascritto alla quantità letterale, sarà il quoto cercato.

Esempi.

$a^5 : a^2 = a^3$ | $a^4 : a^5 = a^{-1}$

$a^6 : a^4 = a^2$ | $a^4 : a^4 = a^0$

$a^m : a^n = a^{m-n}$ | $a^6 : a^9 = a^{-3}$

Scolio

Scolio.

Quando l'esponente del quoto è affetto dal segno negativo, la quantità è una frazione, il cui numeratore è l'unità 1, e il denominatore la potenza determinata dal esponente negativo.

Esempi

a^{-1}	$=$	$\frac{1}{a}$	a^{-5}	$=$	$\frac{1}{a^5}$
a^{-2}	$=$	$\frac{1}{aa}$	a^{-7}	$=$	$\frac{1}{a^7}$
a^{-3}	$=$	$\frac{1}{a^3}$	a^{-m}	$=$	$\frac{1}{a^m}$

Probl. V

Esaltare potenza a potenza per gli esponenti.

Si moltiplichi l'indice della potenza data per l'indice della potenza a cui devesi innalzare, il prodotto soprascritto alla quantità letterale, sarà la potenza che si cerca.

Esem.

Esempi

a^2 alla potenza terza $= a^6$	ab^2 alla seconda $= a^2 b^4$
a^2 alla quarta $= a^8$	ab^2 alla terza $= a^3 b^6$
a^3 alla quinta $= a^{15}$	a^{-2} alla quarta $= a^{-8}$
a^0 alla settima $= a^0$	a^m alla n $= a^{mn}$

Scolio.

Se le date potenze sieno polinomie sarà lo stesso metodo

$$\overline{a+b}^3 \text{ alla potenza quarta } = \overline{a+b}^{12}$$

$$\overline{a^2+b^2}^2 \text{ alla potenza quinta } = \overline{a^2+b^2}^{10}$$

Problema VI.

Estrarre le radici dalle potenze per gli esponenti.

Si divida l'esponente della data potenza pel esponente della radica, che si vuole estrarre, il quoto soprascritto alla quantità letterale sarà la radice cercata.

Esempi

$\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$	$\sqrt[5]{a^{-10}} = a^{\frac{-10}{5}} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$
$\sqrt[4]{a^8} = a^{\frac{8}{4}} = a^2$	$\sqrt[7]{a^8} = a^{\frac{8}{7}} = a^{\frac{8}{7}}$
$\sqrt[3]{a^4} = = a^{\frac{4}{3}}$	$\sqrt[m]{a^n} = = a^{\frac{n}{m}}$
$\sqrt[5]{a} = a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{5}}$	

Scolio.

Scolio

Se le quantità sieno complesse, sarà lo stesso metodo

Sia $\overline{a+b}^4$, da cui debba estrarsi la radice terza, ella sarà $\overline{a+b}^{\frac{4}{3}}$

Parimenti $\sqrt[5]{\overline{c+f}^3} = \overline{c+f}^{\frac{3}{5}}$.

Dell' Algoritmo delle Radici.

Capo VIII.

Delle quantità radicali altre sono semplici, altre composte.

Semplici diconsi quelle che si formano d'un solo termine, come $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{ab}$. Composte, quelle che constano di più termini, come $2+\sqrt{3}$, $a+\sqrt{b}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, di cui alcune si dicono universali, e tali sono quando si estendono ad un radicale composto, come $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, ec.

Teor.

Teorema I.

Se il quadrato a^2 si moltiplichi per un'altro quadrato b^2, ne risulta il quadrato a^2b^2, la cui radice è ab.

Dunque la radice quadratta del prodotto è uguale al prodotto delle radici

Così $4 \times 9 = 36$, la cui radice $2 \times 3 = 6$.

$9 \times 16 = 144$, la cui radice $3 \times 4 = 12$.

Teorema II.

Se il cubo a^3 si moltiplichi pel cubo b^3, ne risulta a^3b^3, la cui radice cubica è ab, cioè il prodotto delle radici, che hanno le componenti.

$8 \times 27 = 216$, la cui radica cubica $2 \times 3 = 6$.

$8 \times 64 = 512$, la cui radica cubica $2 \times 4 = 8$.

Teorema III.

Se la quarta potenza a^4 si moltiplichi per la quarta potenza b^4, diviene a^4b^4, la cui radice quarta è ab, cioè il prodotto delle radici, che hanno le componenti

$16 \times 81 = 1296$, la cui radice quarta $2 \times 3 = 6$.

Corol.

La stessa proprietà sarà di qualunque altra potenza.

Problema I.

Ridurre le radici a forma più semplice.

Sia $\sqrt{48}$. S'intenda $\sqrt{48}$ come un prodotto di due numeri quadrati 16. e 3. il primo dei quali è perfetto, l'altro imperfetto. Dunque, pel 1mo Teorema $\sqrt{48}$ sarà la medesima radice che quella dei dati quadrati 16, 3. Laonde $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Esempi

$\sqrt{18}$	$= 3\sqrt{2}$	[illegible]	[illegible]
$\sqrt{27}$	$= 3\sqrt{3}$	[illegible]	[illegible]
$\sqrt{8}$	$= 2\sqrt{2}$	$\sqrt{12ab}$	[illegible]
$\sqrt{48a^3b^3}$	$= 4ab\sqrt{3ab}$	[illegible]	[illegible]
$\sqrt{12a^4b^2}$	$= 2a^2b\sqrt{3}$	[illegible]	$= 4ab\sqrt{2}$

Se le radici sieno cubiche, sarà lo stesso me-todo nel secondo teorema.

Esem.

Esempi

$$\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{a^3b^3c} = ab\sqrt[3]{c}$$

$$\sqrt[3]{a^4b^4} = ab\sqrt[3]{ab}$$

$$\sqrt[3]{128a^3b} = 4a\sqrt[3]{2b}$$

$$\sqrt[3]{16a^3b^3cc} = 2ab\sqrt[3]{2cc}$$

$$\sqrt{64b^3c^4} = 4bc\sqrt[3]{bc}$$

~~Coroll~~

Col medesimo metodo si procederà nelle radici quarte quinte in infinito.

Corollario I.

Con tal metodo dunque possono paragonarsi le radici fra di loro, e determinarsi la loro ragione. Così, perchè $\sqrt{48}$, e $\sqrt{27}$ sono le medesime che $4\sqrt{3}$, e $3\sqrt{3}$, saranno

ra loro come 4 a 3. E allora si dicono Comunicanti.

Coroll. II.

Siccome poi $\sqrt{48}$ diviene $4\sqrt{3}$, estraendo da uno degli efficienti 16 la radice quadrata, cioè 4 che si scrive fuori del segno $\sqrt{\ }$, così se sia $4\sqrt{3}$ si potrà restituire alla prima forma, se si quadri il 4, e il di lui quadrato si moltiplichi per 3, onde ritorni $\sqrt{48}$.

Scolio.

Che se nè l'uno, nè l'altro degl'efficienti sia quadrato perfetto, allora la quantità sarà irreducibile.

Probl. II.

Ridurre le radici di diversa specie alla medesima specie.

Sieno da ridursi $\sqrt[3]{2}$, e $\sqrt[2]{9}$.

Si esprimano col mezzo degli esponenti, e questi si riducano alla medesima determinazione, come ne seguenti esempi.

$\sqrt[3]{2}$, e $\sqrt[2]{9} = 2^{\frac{1}{3}}$ e $9^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{6}}$ e $9^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{4}$ e $\sqrt[6]{729}$.

$\sqrt[3]{2}$, e $\sqrt[4]{5} = 2^{\frac{1}{3}}$ e $5^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{4}{12}}, 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{81}, \sqrt[12]{125}$.

$\sqrt[3]{a} . \sqrt[2]{b} = a^{\frac{1}{3}} . b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{6}} . b^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{aa} . \sqrt[6]{b^3}$.

Probl. III.

Aggiungere Radici.

I. Si riducano s'è possibile a un'espressione più semplice pel probl. I.

II. Se sono comunicanti si aggiungano i numeri buoni del segno √ altrimenti si aggiungono co' suoi segni.

Esempi.

Radici	$\sqrt{48}$	=	$4\sqrt{3}$
d'aggiungere	$\sqrt{27}$	=	$3\sqrt{3}$
	Somma		$7\sqrt{3} = \sqrt{147}$

Radici	$\sqrt[3]{16}$	=	$2\sqrt[3]{2}$
d'aggiung.	$\sqrt[3]{54}$	=	$3\sqrt[3]{2}$
	Somma		$5\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{250}$

Probl.

Probl. IV.

Sottrarre Radici.

I. Si riducano, se è possibile alla espressione più semplice.

II. Se sono comunicanti si faccia la sottrazione dei numeri fuori del segno $\sqrt{\ }$, altrimenti si congiungano scambiato il segno della sottraenda da + in − e da − in +, come in figura.

$$\begin{array}{lll} \text{Da} & \sqrt{48} = & 4\sqrt{3} \\ \text{sottrarre} & \sqrt{27} = & 3\sqrt{3} \\ \hline & \text{Differenza} & \sqrt{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Da} & \sqrt[3]{16a^3b} = & 2a\sqrt[3]{2b} \\ \text{sottrarre} & \sqrt[3]{16b^4} = & 2b\sqrt[3]{2b} \\ \hline & \text{Differenza} & 2a-2b\sqrt[3]{2b} \end{array}$$

Problema V.

Moltiplicare Radici.

I. Se sieno della medesima specie si moltiplichino le potenze e la radice di tal prodotto, sarà della cosa dimostrata

il prodotto cercato. Esempj

	$\sqrt{6}$	$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{6}$	$\sqrt[4]{ab}$	$\sqrt[4]{a^2}$
	$\sqrt{5}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{-2}$	$\sqrt[4]{ac}$	$\sqrt[4]{a^2}$
Prodotti	$\sqrt{30}$	$\sqrt[3]{12}$	$\sqrt[3]{-12}$	$\sqrt[4]{a^2bc}$	$\sqrt[4]{a^4} = a$

Se sono di diversa specie si riducano (Prob. 2) alla medesima, indi si operi come sopra

	$\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$	$-\sqrt[3]{3} = -\sqrt[6]{9}$	$\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{16}$
	$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{4}$	$\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}$	$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{27}$
Prodotti	$\sqrt[6]{108}$	$-\sqrt[6]{72}$	$\sqrt[12]{432}$

Probl. VI.

Dividere Radici.

Se sono della stessa specie si dividono le potenze, e al quoto si ponga il medesimo esponente.

Dividendi	$\sqrt{9}$	$-\sqrt[3]{6}$	$-\sqrt{a^2b}$	$\sqrt{16a^2c}$
Divisori	$\sqrt{3}$	$-\sqrt[3]{2}$	$\sqrt{ab}$	$-\sqrt{4ac}$
Quoti	$\sqrt{3}$	$\sqrt[3]{3}$	$-\sqrt{a}$	$-\sqrt{4a}$

Scolio I.

Le radici di diversa specie si riducano prima alla medesima, indi si operi come sopra.

Scolio II.

Lo stesso metodo ha luogo per moltiplicare, e dividere le radici imaginarie, dov'è da notarsi l'errore del chiarissimo M. Ozanam, nel 1. Lib. d'Algebra, il quale aveva opinione, che imaginario per imaginario sempre producesse imaginario.

Moltiplicare	$\sqrt{-3}$	$-\sqrt{-3}$	$\sqrt{-4}$	[illegible]
	$\sqrt{-2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{-9}$	$-\sqrt{4}$
Prodotti	$\sqrt{+6}$	$-\sqrt{-6}$	$\sqrt{36}$	$-\sqrt{-20}$

Dividere	$\sqrt{-4}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{-20}$
	$\sqrt{-2}$	$\sqrt{-1}$	$-\sqrt{-2}$	$-\sqrt{-4}$
Quoti	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{-3}$	$-\sqrt{-4}$	$-\sqrt{5}$

Scolio III.

Tali cose ben comprese non sarà difficile l'estendere il metodo alle radici composte, ed alle radici universali, benchè in queste si adoprino talvolta altri particolari metodi, i quali perchè dipendono dalle equazioni alte, non sarà questo proprio luogo di esporle.

Applicazione dell'Analisi agli Problemi semplici.

I Problemi Aritmetici si riducono a due specie. Altri si dicono determinati, altri indeterminati. I primi sono quelli, le cui condizioni, overo equazioni uguagliano il numero delle incognite che si vanno indagando. Indeterminati poi quelli, le cui condizioni sono in minor numero delle quantità cercate.

Proclo poi comentatore di Euclide, e Giovanni Pellio li distinguono ancora in più che determinati, le cui condizioni sono in maggior numero delle quantità cercate.

ma molti possono ridursi alla prima specie.

Quando il problema è determinato, è necessario di formare altrettante equazioni quante sono le incognite, che si vanno indagando. Imperocchè, così eliminate per via di sostituzione, tutte ad una ad una si vanno riducendo ad una sola, che si cerca, la quale determinata, si determinano ancora le rimanenti.

Ma quando il problema è indeterminato, è necessario, che si restino più incognite, le quali determinate secondo la regola da spiegarsi a suo luogo, si determinano ~~il problema~~ si risolve il problema.

Problema I

Dividere [illegible] in due parti, delle quali la maggiore sia quintupla della minore.

Sia la ragione 1 : 5 [illegible] 1 . m [illegible] a, e la parte minore si dica x, sarà la maggiore mx. Dunque per la condizione del problema si avrà l'equazione

$$x + mx = a.$$

E dividendo da una parte, e dall'altra pei coefficienti dell'incognita, risulta

$$\frac{x+mx}{1+m} = \frac{a}{1+m}$$

cioè $x = \frac{a}{1+m}$, e sostituiti i numeri corrispondenti.

si trova $x = \frac{60}{1+5} = 10$, parte minore, dunque la maggiore mx, ovvero $5x = 50$.

Problema II.

Dividere il 60 in due parti tali, che il quadrante, cioè la quarta parte della prima, con la metà della seconda facciano 20.

Sia la Parte prima x, la seconda y; $\frac{1}{4} = \frac{1}{m}$; $\frac{1}{2} = \frac{1}{n}$; $60 = a$; $20 = b$, sarà

Per la 1ma condiz.e $x + y = a$ A

Per la 2da $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = b$ B

Cioè tolti i divisori $nx + my = bmn$ B

in A trasponendo diviene $x = a - y$

E moltiplicando per n, $nx = an - ny$

Sostit. in B, $an - ny + my = bmn$

Separando $-ny + my = bmn - an$

E dividendo pei ~~termini~~ coefficienti dell' incognita y

Risulta $y = \frac{bmn - an}{-n+m} = \frac{160-120}{2} = \frac{40}{2} = 20$

Dunque $x = 60 - 20 = 40$

Problema III.

L' età di Pietro è tripla dell' età di Paolo, quella di Antonio è sestupla. La somma delle età è 150. Si cerca l' età di ciascuno.

Sia la ragione $1:3 = 1:m$; la rag. $1:6 = 1:n$. Sia $150 = a$. Se l' età di Paolo si dica x; sarà l' età di Pietro mx, e però quella di Ant.° nx.

Dunque $x + mx + nx = a$.

E dividendo pei coefficienti dell' incognita

Risulta $x = \frac{a}{1+m+n} = \frac{150}{10} = 15$. l' età di Paolo.

Dunque l' età di Pietro 45, e quella di Ant.° 90.

Problema IV.

Trovare due numeri, il primo de' quali sia triplo del secondo, ma se dal primo si

tolga 30, e 16 dal secondo, i residui divengano uguali.

Sia la ragione 3 : 1 = m : 1. Sia 30 = a, 16 = b. Se il secondo si dica x, sarà il primo mx Dunque

$$mx - a = x - b.$$

E separando $mx - x = a - b$

E dividendo $x = \frac{a-b}{m-1} = \frac{30-16}{3-1} = \frac{14}{2} = 7.$

Dunque $3x = 21.$

Problema V.

Trovare due numeri il primo de' quali sia quintuplo del secondo, ma aggiungendo 4 al primo, e 6 al secondo, sieno le somme, come 4 ad 1

Sia la ragione 5 : 1 = m : 1; la 4 : 1 = n : 1, 4 = a; 6 = b. Se il secondo numero si dica x; sarà il primo mx

Dunque $mx + a : x + b :: n : 1$

moltiplicando gli estremi, e medj.

$$mx + a = nx + bn$$

separando, $mx - nx = bn - a$

e dividendo $x = \frac{bn-a}{m-n} = \frac{24-4}{5-4} = \frac{20}{1} = 20.$

Dunque mx, ovvero $5x = 100.$

Problema VI.

Trovare un numero, da cui tolto 20, indi 100, sieno i residui come 3 a 1.

Sia 3:1 = m:1, 20 = a, 100 = b, e il numero cercato = x, si avrà

$$x - a : x - b :: m : 1$$

moltiplicando gli estremi, e i medj

$$x - a = mx - mb$$

separando $mb - a = mx - x$

E dividendo pel coeffic. di x

$$x = \frac{mb - a}{m - 1} = \frac{280}{2} = 140.$$

Problema VII.

Trovare due numeri tali che se al primo si aggiunga l'unità, e si tolga dal secondo, la quantità prima sia doppia della seconda; ma se l'unità si levi dal primo, e si aggiunga al secondo, le quantità divengano uguali

Sia il 1mo n° cercato = x, il 2do = y, la rag. 2 : 1 = m : 1, ~~[illegible]~~ 1 = a, sarà

Per la 1ma condiz. $x + a : y - a :: m : 1$

Per la 2da. $x - a = y + a$ B

Della 1ma moltipd.o gli estremi, e medj

diviene $x + a = my - ma$ A

in B trasponendo diviene $x = y + 2a$

sostit. in A $y + 3a = my - ma$

separando $3a + ma = my - y$

E dividendo $y = \frac{3a + ma}{m - 1}$

$= \frac{3+2}{2-1} = 5.$

Dunque $x = y + 2a = 7.$

Problema VIII.

Trovare un'numero, la cui metà con la terza, e quarta parte compongano 12.

Sia x il n.o cercato, la rag. $\frac{1}{2} = \frac{1}{m}$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{n}$. $\frac{1}{4} = \frac{1}{r}$, $12 = a$. Dunque

$$\frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \frac{x}{r} = a.$$

E levate le frazioni.

$$nrx + mrx + mnx = mnra.$$

E dividendo $x = \frac{mnra}{nr + mr + mn}$

$= \frac{288}{26} = \frac{144}{13} = 11 + \frac{1}{13}.$

Probl. IX

Dividere 42 in tre parti continue proportionali Geometriche, la cui ragione sia, come 1 : 4

Sia x la parte minore, la rag. $1:4 = 1:m$, $42 = a$; sarà la seconda parte $= mx$, la terza $= m^2x$.

Dunque $x + mx + m^2x = a$

E dividendo $x = \frac{a}{1+m+m^2} =$
$= \frac{42}{21} = 2$ Parte prima.

Dunque la 2da 8, la terza 32.

Problema X.

Rinvenire due numeri, la cui differenza sia 24, e la somma 46.

Sia il 1mo n.° $= x$, il 2do $= y$, sia $24 = a$, $46 = b$. Dunque

Per la 1ma condiz. $x - y = a$ A
Per la 2da $x + y = b$ B

in A per Antitesi diviene $x = a + y$

Sostit. in B $a + 2y = b$

Separando $2y = -a + b$

E dividendo $y = \frac{-a + b}{2} = 11$.

E però $x = 35$.

Probl. XI.

Trovare tre numeri, di cui il primo col terzo farà 22, il primo col secondo 18, il secondo col terzo 24

Sia il primo dei cercati $= x$, il 2do $= y$, il 3zo $= z$, sia $22 = a$, $18 = b$, $24 = c$. Dunque

Per la 1ma condiz.e $x + z = a$ A

Per la 2da $x + y = b$ B

Per la 3za $y + z = c$ C

in A $x = a - z$

Sostit. in B $a - z + y = b$

E riducendo all'incognita y. diviene $y = b - a + z$

Sostit. questo valore in C

Diviene $b - a + z + z = c$

cioè $2z = c - b + a$

E dividendo $z = \frac{c + a - b}{2} = 14$

Dunque $x = 8$; $y = 10$.

Probl. XII.

Trovare quattro numeri, di cui il primo col 2do e 3zo faccia 20; il 2do col terzo e quarto faccia 22, il terzo col quarto e primo faccia 24, il quarto col primo e secondo faccia 27

Sia il primo $= x$, il 2do $= y$, il 3zo $= z$ il quarto $= u$, $20 = a$, $22 = b$, $24 = c$, $27 = d$. ~~Dunque~~ se la somma di tutti i numeri cercati si dica $\int$, sarà

$$x + y + z + u = \int$$

Ma $\quad x + y + z = a$

Dunque $\quad u = \int - a$

Così si trova $\quad x = \int - b$

e $\quad y = \int - c$

e $\quad z = \int - d$

Dunque $\int = 4\int - a - b - c - d$

Cioè scambiati i segni

$$-\int = -4\int + a + b + c + d$$

E trasposti $4\int$, risulta $3\int = a + b + c + d$.

E dividendo $\int = \frac{a+b+c+d}{3} = \frac{93}{3} = 31$.

Laonde $\quad u = 31 - 20 = 11$

$x = 31 - 22 = 9$

$y = 31 - 24 = 7$

$z = 31 - 27 = 4$

Algebra
Ternion VII.

Probl. XIII.

Trovare un numero uguale alle sue parti qualunque, e quante si vogliono +m.

Numero cercato x. Parti date $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, m$

Dunque $\frac{ax}{b} + \frac{cx}{d} + \frac{ex}{f} + m = x$

Levate le frazioni diviene

$$adfx + bcfx + bdex + bdfm = bdfx$$

E scambiati i segni

$$-adfx - bcfx - bdex - bdfm = -bdfx$$

E separando le quantità note dalle incognite.

$$bdfx - adfx - bcfx - bdex = bdfm.$$

E dividendo $x = \frac{bdfm}{bdf - adf - bcf - bde}$

Applichiamo questo problema a un caso particolare

... i $\frac{2}{6}$ e $\frac{2}{10}$ e $\frac{4}{11}$ d'una ... sono nell' acqua, Passi $4\frac{1}{3}$ fuori dell'acqua. Si cerca ... altezza di tutta la torre.

Se pongasi $\frac{2}{6} = \frac{a}{b}$, $\frac{3}{10} = \frac{c}{d}$, $\frac{4}{11} = \frac{e}{f}$, $4\frac{1}{3}$ ovv.º $\frac{13}{3} = m$, e l'altezza cercata $= x$, sarà

$$\frac{ax}{b} + \frac{cx}{d} + \frac{ex}{f} + m = x$$

Risolta come sopra si trova

$$x = \frac{bdfm}{bdf - adf - bcf - bde} = 1430$$

L'altezza cercata è passi 1430.

Probl. XIV.

Pietro aumenta la facoltà, come 4 a 5, indi, come 2 : 3, dipoi come 6 : 7, e finalmente la facoltà diviene 10000. Si cerca la prima facoltà

Sia x

Moltiplicandola dunque in $\frac{5}{4}$ diviene $\frac{5x}{4}$.

Moltiplicandola poi in $\frac{3}{2}$ diviene ~~$\frac{10x}{24}$~~ $\frac{15x}{8}$

E moltiplicandola in $\frac{7}{6}$ diviene $\frac{105x}{48}$

Ora $\frac{105x}{48} = 10000$

E si trova $x = \frac{480000}{105} = 4571 + \frac{45}{105}$.

Universalmente

Sia $4:5 = a:b$, $2:3 = c:d$, $6:7 = e:f$, $10000 = m$, con la quantità cercata x.

componendo le ragioni $\begin{matrix} a:b \\ c:d \\ e:f \end{matrix}$ si avrà $ace:bdf$

Moltiplicando x in $\frac{bdf}{ace}$ risulta $\frac{bdfx}{ace}$

Ora $\frac{bdfx}{ace} = m$

E levata la frazione, $bdfx = acem$

E dividendo $x = \frac{acem}{bdf} = \frac{4 \cdot 2\ 6 \cdot 10000}{5 \cdot 3 \cdot 7}$

$= \frac{480000}{105}$, come sopra.

Problema XV.

Pietro, e Paolo spendono somme uguali. Il primo guadagna 126, l'altro perde 87. Il capitale poi del primo diviene doppio di quello del secondo. Si cercano i dispendj?

Sia x il dispendio comune, $126 = a$, $87 = b$. La rag. $2:1 = m:1$; sarà

$$x + a : x - b :: m : 1$$

moltiplicando gli estremi, e medj

$$x + a = mx - mb$$

separando $mb + a = mx - x$

E dividendo $x = \frac{mb + a}{m - 1} = 174 + 126$

$= 300$ Dispendio comune cercato.

Problema XVI

[illegible] accresce la facoltà di $\frac{1}{3}$, e ne spende 8; accresce poi di $\frac{1}{4}$ con un nuovo dispendio 15. [illegible] di nuovo [illegible] di $\frac{1}{5}$ [illegible] la sua [illegible] viene 25. Si cerca la facoltà prima?

Sia x la facoltà cercata

[illegible] di $\frac{1}{3}$ diviene $x + \frac{x}{3}$ [illegible] 3 [illegible] 3

[illegible] e ne spende, $\frac{4x}{3} - 8$, cioè $\frac{4x - 24}{3}$

4.ª Aumentandola di $\frac{1}{4}$ diviene

$$\frac{4x-24}{3} + \frac{4x-24}{12} \text{ ovvero } \frac{36x-18}{30} = \frac{3x-10}{[illegible]}$$

e sottratto 15, $\frac{3x-4[illegible]-15}{[illegible]} = \frac{3x-4-45}{3} = \frac{3x-49}{3}$

5.ª Aumentandola poi di $\frac{1}{5}$ diviene $x-25-\frac{x-25}{5}$ cioè $5x-125-x+25$

$$\frac{3x-49}{3} + \frac{3x-49}{15} = \frac{15x-235-3x-49}{45}$$

$$= \frac{36x-442}{45} = \frac{4x-98}{5}, \text{ e sottratto}$$

5 che spende, $\frac{4x-98}{5} - 5 = \frac{4x-98-25}{5}$

$$= \frac{4x-73}{5}$$

Dunque $\frac{4x-73}{5} = 25$

4.ª Aumentandola di $\frac{1}{4}$ diviene

$$\frac{4x-24}{3} + \frac{4x-24}{12} = \frac{16x-96+4x-24}{12}$$

$$= \frac{20x-120}{12} = \frac{5x-30}{3}, \text{ e sottratto}$$

15 si ha rendendo $\frac{5x-30}{3} - 15 = \frac{5x-75}{3}$

5.ª Aumentandola poi di $\frac{1}{5}$ diviene

$$\frac{5x-75}{3} + \frac{5x-75}{15} = \frac{25x-375+5x-75}{15}$$

$$= \frac{30x-450}{15} = 2x-30, \text{ e sottratto}$$

5 che spende $2x-35$

Dunque $2x-35 = 25$

Cioè $x = 30$.

Problema XVII

Un mobile ha corso 6 miglia in 1 giorno, ed ha incominciato il suo corso da 8 giorni. Un altro mobile corre 8 miglia il giorno, e incomincia il suo corso. Si cerca il tempo del loro congiungimento.

Sia x il tempo cercato lo spazio fatto dal primo $= ab$; spazio da farsi dal primo ax, spazio da farsi dal secondo cx

Poiché dunque lo spazio del secondo è uguale a ambi li spazi del primo sarà

$$cx = ab + ax$$

separando $\quad cx - ax = ab$

e divid. $\quad x = \frac{ab}{c-a} = \frac{48}{2} = 24.$

Problema XVIII

Dato qualunque numero 20 dividerlo in tre parti tali, che la prima moltiplicata per 2 la 2da per 3, la terza per 4, facciano un medesimo prodotto.

Sia la prima parte $= x$ la 2da $= y$ la terza $= z$, $20 = a$, $2 = b$, $3 = c$, $4 = d$. Dunque.

Per la 1ma Condiz.: $x + y + z = a$ A

E per la 2da $bx = cy$ B

E per la 3za $bx = dz$ C

In A $x = a - y - z$

Moltip. per b. $bx = ba - by - bz$

Sostit. in B, e C, sarà

I. $ba - by - bz = cy$

II. $ba - by - bz = dz$

Volendo eliminar y, sarà

$$ba - bz = cy + by$$

$$ba - bz - dz = by$$

Dividendo pei coeffiz. di y

$$y = \frac{ba - bz}{c + b}$$

$$y = \frac{ba - bz - dz}{b}. \text{ Dunque}$$

$$\frac{ba - bz}{c+b} = \frac{ba - bz - dz}{b}. \text{ cioè}$$

$$b^2a - b^2z = bac - bcz - cdz + b^2a - b^2z - bdz$$

$$0 = bac - bcz - cdz - bdz$$

Si trova $z = \dfrac{bac}{bc + cd + bd} = \dfrac{120}{26} = 4\dfrac{8}{13}$

Dunque $y = 40 - \frac{120}{13} . 5 = \frac{40 \cdot 5}{13} - \frac{80}{13} = 6 + \frac{2}{13}$

Dunque $x = \frac{120}{13} = 9 + \frac{3}{13}$

Prova

$x = \frac{120}{13} \times 2 = \frac{240}{13}$

$y = \frac{80}{13} \times 3 = \frac{240}{13}$

$z = \frac{60}{13} \times 4 = \frac{240}{13}$

Seguono alcuni Problemi di mistione

Problema XIX

Dati due metalli, di cui l'oncia del primo vale 28, del 2.do 10. Concorre oncie 20 di metallo misto, la cui oncia vaglia 12. Quante oncie si ricercano dall'uno, e dall'altro metallo?

Oncie del 1mo metallo x, del 2do y. Dunque

sarà 1ma equaz.e $x + y = 20$ A

Per la 2da $= 8x + 16y = 240$ B

In A $x = 20 - y$

E moltip. p. 8 diviene

$8x = 160 - 8y$

sostit. in B, $160 - 8y + 16y = 240$

trasp. etc. $8y = 80$

E divid.o $y = 10$.

Dunque $x = 20 - y = 20 - 10 = 10$

Problema XX.

Dati due metalli misti, nel primo de' quali la parte dell'oro è 1 dell'argento 2; e nell'altro 4 parti d'oro, d'argento 5. Per comporre un nuovo misto in cui la parte dell'oro sia 3, dell argento 4. si cerca quale porzione dovrà prendersi da ciascuno dei due misti.

Sia la porzione del primo $= x$, del 2do. $= y$.

Perchè poi le parti componenti sono nella ragione dei composti; e il primo composto 3 contiene 1. parte d'oro, e 2. d'argento; il composto x conterrà $\frac{x}{3}$ d'oro, e $\frac{2x}{3}$ di argento.

Similmente, se l'altro composto 9 contiene 4 parti d'oro, e 5 d'argento; il composto y conterrà $\frac{4y}{9}$ d'oro, e $\frac{5y}{9}$ d'argento.

Ora poichè, per la condizione del problema la parte dell'oro dee esser 3, e dell'argento 4, si avranno queste equazioni

$$\frac{x}{3} + \frac{4y}{9} = 3$$

$$\frac{2x}{3} + \frac{5y}{9} = 4$$

Cioè levate le frazioni

$$9x + 12y = 81$$
$$18x + 15y = 108$$

ovvero, deprimendo per 3.

$$3x + 4y = 27$$
$$6x + 5y = 36$$

Volendo eliminare x, mettere allo stesso coefficiente diveranno

$$18x + 24y = 162$$
$$18x + 15y = 108$$

ovvero depr per 3

$$6x + 8y = 54 \quad A$$
$$6x + 5y = 36 \quad B$$

In A: $6x = 54 - 8y$

sostit. in B diviene

$54 - 8y + 5y = 36$

cioè cambi. i segni

$$-54 + 8y - 5y = -36$$

e riducendo $3y = 18$

e divid. $y = 6$. Dunq. $x = 1$.

Probl. XXI

Siano ora tre metalli misti, di cui il primo contenga 12 carati d'argento A, 1 di rame B, 3 di oro O, sicchè sia

$$12A + 1B + 3O$$
$$1A + 12B + 3O$$
$$0A + 14B + 2O$$

e debba comporre un nuovo misto che sia

$$4A + 9B + 3O$$

si cerca qual parte si dovrà prendere dai dati metalli?

Parte del 1mo x; del 2do y; del 3zo z. Saranno ~~in parte~~

Le parti del 1mo misto $12Ax + 1Bx + 3Ox$

le parti del 2do misto $1Ay + 12By + 3Oy$

le parti del 3zo $0Az + 14Bz + 2Oz$

Paragonando [illegible] le condizioni del problema [illegible]

Sia la prima equaz.e $12x + y = 4$ A

Sia la 2da $x + 12y + 14z = 9$ B

Sia la 3za $3x + 3y + 2z = 3$ C

~~[illegible]~~ Ora, volendo eliminare x [illegible] la x in tutte le equazioni al medesimo coefficiente avremo

$$12x + y = 4 \quad D$$
$$12x + 144y + 168z = 108 \quad E$$
$$12x + 12y + 8z = 12 \quad F$$

Da D $\quad 12x = 4 - y$

Sostit. in E, ed F

$$4 - y + 144y + 168z = 108$$
$$4 - y + 12y + 8z = 12$$

cioè

$$143y + 168z = 104$$
$$11y + 8z = 8$$

Volendo eliminare y, riducendo al med.mo coefficiente, avremo

$$143y + 168z = 104 \quad G$$
$$143y + 104z = 104 \quad H$$

Da G $\quad 143y = 104 - 168z$

Sostit. in H diviene

$$104 - 168z + 104z = 104$$

Separando $\quad 0 = 64z$

e dividendo $z =$ ~~$\frac{104}{143}$~~ $\frac{0}{0}$

Dunque $x = \frac{3}{11}$; $y = \frac{8}{11}$

Problema XXII

Determinare se vi sia framischiata qualche porzione d'argento in una data mistura, che si suppone d'oro puro.

Sia il peso della mistura di libre 10, e in essa la parte dell'oro x, quella dell'argento y.

Dunque per la prima condizione

$$x + y = 10$$

E traspon. $x = 10 - y$ ...... A

Si suppone, come è stata dimostrata dall'esperienza, e di cui si dà la ragione nell'idrostatica) che i metalli posti nell'acqua perdono una parte del loro peso, che l'oro ne perde meno dell'argento, e di qualunque altro metallo; che di 10 libre d'oro puro si perde $\frac{5}{9}$ di libra, e di 10 libre di argento perdesi 1. libra

Dunque, se di 10 libre d'oro perdesi $\frac{5}{9}$ di libra, quanto si perderà della quantità x?

Cioè $10 : \frac{5}{9} :: x : \frac{5x}{90}$

Perciò $\frac{5x}{90}$ sarà la perdita dell'oro x.

Similmente, se di 10 libre di argento si perde libre 1: quanto si perderà nella quantità dell'argento y?

Cioè $10 : 1 :: y : \frac{y}{10}$

Onde $\frac{y}{10}$ sarà la perdita dell'argento y.

Ora dall'esperienza consta, che la nostra manifattura infusa nell'acqua perde $\frac{2}{3}$ di libra del suo peso, e questa perdita è uguale a quella trovata sopra dell'oro x, e dell'argento y

Dunque $\frac{5x}{90} + \frac{y}{10} = \frac{2}{3}$

cioè levate le frazioni

$150x + 270y = 1800$ ... B

E sostituito in questa il valore di x trovato sopra in A, diviene

Si moltiplichi l'equazione A per 150

diverrà $150x = 1500 - 150y$

E sostituito questo valore in B

sarà $1500 - 150y + 270y = 1800$

Separando, etc. $120y = 300$

E risulta $y = \frac{300}{120} = 2 + \frac{1}{2}$

Dunque $x = 10 - 2\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$

Problema XXIII.

Dato adesso il prezzo de composti, e la ragione de' componenti, rinvenire il prezzo di qualunque componente

Sia il primo composto $3A + 4B = 10$

Il secondo $5A + 6B = 16$

E sia il prezzo del primo componente x, del secondo y, sostituendo il prezzo in luogo delle componenti, sarà

$$3x + 4y = 10$$
$$5x + 6y = 16$$

E riducendo x al med.^mo coefficiente

$$15x + 20y = 50 \quad A$$
$$15x + 18y = 48 \quad B$$

Nell'equazione A $15x = 50 - 20y$

Sostit. in B $50 - 20y + 18y = 48.$

Separando, e $2 = 2y$

E dividendo $y = 1$. Dunque $x = 2$

Esempj per gl' indeterminati.

Problema I.

Dati tre metalli, di cui l'oncia del primo vale ƒ 4, del 2do 6, del terzo 9. comporne Oncie 20, di cui ciascuna vaglia ƒƒ 7. Quante Oncie dovranno prendersi dai detti metalli?

Porzione del primo x, del 2do y, del 3zo z.

Dunque per la 1ma condizione $x + y + z = 20$ A

E per la 2da $4x + 6y + 9z = 140$ B

In A $x = 20 - y - z$

moltip. p. 4. $4x = 80 - 4y - 4z$

sostit. in B, $80 - 4y - 4z + 6y + 9z = 140$

Riducendo $80 + 2y + 5z = 140$

cioè $2y + 5z = 60$

Riducendo alla sola incognita y, diviene

$$y = \frac{60 - 5z}{2}$$

Ora, bisogna determinare arbitrariamente la porzione z

Sia dunque $z = 10$; sarà $y = \frac{60 - 50}{2} = 5$.

e però $x = 20 - 5 - 10 = 5$

Sia $z = 8$; sarà $y = \frac{60 - 40}{2} = 10$; e

però $x = 20 - 10 - 8 = 2$.

Sesto

Scolio.

Se siano quattro comescibili, allora si doveranno determinare due ad arbitrio. Se cinque, se ne determineranno tre, e così procedendo.

Ma poichè 2do questo metodo convenga spesse volte di fare più supposti prima di determinare la quantità che soddisfi alla questione, sarà bene di applicare ancora in questi il metodo per trovare i numeri interi, ancorchè lo stato della questione necessariamente non lo esigesse.

Questo metodo consiste nel dividere quanto si può, in modo che l'incognita di cui si cerca il valore, o positivo, o negativo resti col coefficiente 1., e nell'uguagliare il residuo all'intero, finchè addivengano i numeri interi, come co' seguenti esempj si farà chiaro.

Problema II

Si hanno cose di tre spezie, di cui l'oncia della prima vale ƒ 8, quella della 2.da 3, quella della terza 2. Per comporne oncie 16 ciascuna delle quali vaglia 7, quante oncie si doveranno prendere da ciascuna specie

Si ce. della prima specie x. della 2da y. della 3za z. Dunque

$$x + y + z = 16 \quad A$$
$$8x + 5y + 2z = 112 \quad B$$

In A $z = 16 - x - y$

moltip. per 2

$$2z = 32 - 2x - 2y$$

Sostit. in B

$$32 - 2x - 2y + 5y + 8x = 112$$

Cioè $6x + 3y = 80$

Tornando a riduzione per num.ri interi,

Si faccia $3y = 80 - 6x$

e dividendo $y = \frac{80 - 6x}{3} = 26\frac{2}{3} - 2x$

Il che dimostra, che non possono aversi tutti i numeri interi.

In A. $x = 16 - y - z$

moltip. per 8

$$8x = 128 - 8y - 8z$$

Sostit. in B

$$128 - 8y - 8z + 5y + 2z = 112$$

Cioè $16 - 3y - 6z = 0$

E traspor. $16 - 6z = 3y$

E divid.o $y = \frac{16 - 6z}{3} = 5\frac{1}{3} - 2z$

Si vede che non possono aversi tutti i numeri interi.

Sia $z = 1$; $y = 5\frac{1}{3} - 2 = 3\frac{1}{3}$

E però $x = 10\frac{2}{3}$.

Sia $z = 2$; $y = 5\frac{1}{3} - 4 = 1\frac{1}{3}$

E però $x = 16 - y - z = 12\frac{2}{3}$.

Ma quando non possono aversi tutte le quantità in numeri interi, è preferibile la regola di Alligazione 2da. la regola dell'Aritmetica benchè la regola dell'Aritmetica riesca del tutto inetta, quando la natura della questione ricerca numeri interi, come ne' seguenti esempj.

Probl. III.

Trovare per numeri interi due numeri tali, che il triplo del primo col doppio del 2do. faccia 20.

Num. primo x, 2do. y. Dunque

$$3x + 2y = 20$$

si faccia $2y = 20 - 3x$.

dividendo $y = \frac{20-3x}{2} = 10 - x - \frac{x}{2}$

cambiato il segno, si ponga $\frac{x}{2} = m$ intero

diviene $x = 2m$.

Supposto I

sia $m = 1$, $x = 2$. $y = \frac{20-6}{2} = \frac{14}{2} = 7$

Supposto II.

sia $m = 2$; $x = 4$; $y = \frac{20-12}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

..rogresso.

$x = 2,\ 4,\ 6,\ 8$

$y = 7,\ 4,\ 1,\ -2$

Probl. IV.

Persone 50, di cui parte sono Uomini, parte Donne, parte Fanciulli risicano insieme a un giuoco di lotto scudi 97. Giuocano gli Uomini scudi 3 a testa, le Donne $2\frac{1}{2}$ i Fanciulli soldi 16. Si cerca il n.° degli Uomini, delle Donne ecc.

N.° degli Uomini x, delle Donne y, dei Fan. z Dunque

$$x + y + z = 50 \quad A$$

$$3x + \frac{5y}{2} + \frac{4z}{5} = 97 \quad B$$

Cioè tolte le fraz.

$$30x + 25y + 8z = 970 \quad B$$

In A. $x = 50 - y - z$

moltip. per 30, diviene

$$30x = 1500 - 30y - 30z$$

sostit. in B

$$1500 - 30y - 30z + 25y + 8z = 970$$

Cioè $530 - 5y - 22z = 0$

scambiati i segni

$$-530 + 5y + 22z = 0$$

$$5y = 530 - 22z$$

$$y = \frac{530 - 22z}{5} = 106 - 4z - \frac{2z}{5}$$

cambiato il segno. Si paragoni la frazione all'intero m, ovvero n, etc., sarà

$$\frac{2z}{5} = m; \text{ cioè } z = \frac{5m}{2} = 2m + \frac{m}{2}$$

Si ponga $\frac{m}{2} = n$, risulta $m = 2n$

Supposto I.

Sia $n = 1$; $m = 2$; $z = 5$

Dunque $y = \frac{530 - 110}{5} = \frac{420}{5} = 84.$

Onde $x = 50 - 84 - 5 = 50 - 89 = -39.$

Supposto II.

Sia $n = 2$; $m = 4$; $z = 10$

Dunque $y = \frac{530 - 220}{5} = \frac{310}{5} = 62.$

E però $x = 50 - 62 - 10 = 50 - 72 = -22$

Progressioni.

$x = -39, -22, -5, 12, 29$

$y = 84, 62, 40, 18, -4$

$z = 5, 10, 15, 20, 25$

Annotazione

Ma per trovare la formula, in cui si cerca che l'incognita nella frazione positiva, o negativa resti col coefficiente ~~—~~ 1. se si pretenda qualche ~~—~~ numero, per cui ciò possa ottenersi, si moltiplichi

il coefficiente di essa incognita per tal numero, e si otterrà più speditamente la detta formula.

Così nel caso nostro avendo $-\frac{2z}{5}$, se si moltiplichi per 2, diverrà $-\frac{4z}{5}$, e si riduce a $-\frac{z}{5}$. Si paragoni poi (scamb. il segno) all'intero, e si avrà

$$\frac{z}{5} = m;\ \text{o}\ z = 5m.$$

E operando, come prima si troveranno i medesimi valori.

Problema V.

Un' sopraintendente di strade, o argini chiama al lavoro 43 persone, di cui parte sono uomini, parte donne, parte fanciulli. Paga agli uomini lire 7 a testa, alle donne 9, ai fanciulli 3, e deve impiegare lire 257 al giorno. Si cerca quanti uomini, quante donne e quanti fanciulli potrà avere.

1.º Degli uomini x, delle donne y, dei fanciulli z. Dunque

$$x + y + z = 43 \quad A$$
$$7x + 9y + 3z = 257 \quad B$$

Volendo eliminare x, si faccia

$$x = 43 - y - z$$

moltip. per 7

$$7x = 301 - 7y - 7z$$

sostit. in 83

$$301 - 7y - 7z + 9y + 3z = 257$$

$$44 + 2y - 4z = 0$$

cioè $2y = -44 + 4z$

$$y = \frac{4z - 44}{2} = 2z - 22$$

$$y = 2z - 22$$

Insetto I.

sia $z = 12$; $y = 24 - 22 = 2$

$$x = 43 - 2 - 12 = 43 - 14 = 29$$

Insetto II.

sia $z = 13$; $y = 26 - 22 = 4$

$$x = 43 - 4 - 13 = 43 - 17 = 26$$

Progressioni

$x = 29,\ 26,\ 23,\ 20,\ 17,\ 14,\ 11,\ 8,\ 5,\ 2.$

$y = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20.$

$z = 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21.$

Problema VI.

Uno dee pagare lire 608 con monete 72 di tre specie, la prima delle quali vale lire 4, la 2da 8, la terza 12. Si cerca quante monete di ciascuna specie dovrà esborsare?

Monete della 1ma specie x, della 2da y, della 3za z

Dunque

$$x + y + z = 72 \quad A$$
$$4x + 8y + 12z = 608 \quad B$$

in A $x = 72 - y - z$

moltip. per 4, diviene

$$4x = 288 - 4y - 4z$$

sostit. in B

$$288 - 4y - 4z + 8y + 12z = 608$$

Cioè $4y + 8z = 320$

Ed $y = \frac{320 - 8z}{4} = 80 - 2z$

$$y = 80 - 2z$$

supposto I.

sia $z = 5$; $y = 70$; $x = 72 - 70 - 5 = -3$

supposto II.

sia $z = 6$; $y = 68$; $x = 72 - 74 = -2$

Sicchè

$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$
$y = 70, 68, 66, 64, 62, 60, 58, 56, 54, 52$
$z = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$

Problema VII.

Si dee distribuire una quantità 1259 a uomini 98, di quattro classi: a ciascuno della prima classe 10, della 2.da 20, della 3.za 30, della quarta 1. Si cerca quanti riceveranno 10, quanti 20, ec.

Classe 1.ma x, 2.da y, 3.za z, 4.ta u. Dunque

$$x + y + z + u = 98 \quad A$$

$$10x + 20y + 30z + u = 1259 \quad B$$

In A $\quad u = 98 - x - y - z$

Sostit. in B. diviene

$$98 - x - y - z + 10x + 20y + 30z = 1259$$

Cioè $\quad 9x + 19y + 29z = 1161$.

E $\quad x = \dfrac{1161 - 19y - 29z}{9}$

~~cioè $x = 1$~~ $\quad$ suppongo I

Sia $y = 1$, $x = \dfrac{1161 - 19 - 29z}{9} = 129 - 2 - \dfrac{1}{9}$

$- 3z - \dfrac{2z}{9} = 127 - \dfrac{1}{9} - 3z - \dfrac{2z}{9}$.

Cambi il segno pongasi $\dfrac{2z}{9} + \dfrac{1}{9} = m$

cioè moltip. per 5 giusto l'annotaz. del cap. 4.to

cioè $\dfrac{10z + 5}{9} = m$; cioè $\dfrac{z + 5}{9} = m$

cioè $z = 9m - 5$.

[illegible]

Ternion' VIII.

Supposto II

Sia $m = 1$; $z = 4$; $x = \frac{1142 - 116}{9} = \frac{1026}{9}$

$= 114$; Dunque $u = 98 - 114 - 1 - 4 = 98 - 119$

$= -21$.

Supposto III.

Sia $y = 2$; $x = \frac{1161 - 38 - 29z}{9} = \frac{1123 - 29z}{9}$

$= 124\frac{7}{9} - 3z - \frac{2z}{9}$

Pongasi il segno $\frac{2z - 7}{9} = m$

moltiplicando per 5 si diviene

$\frac{10z - 35}{9} = m = z\frac{8}{9} = m$

onde $z = 9m + 8$

Supposto IV.

Sia $m = 0$; $z = 8$; $x = \frac{1123 - 232}{9}$

$= \frac{891}{9} = 99$.

Dunque $u = 98 - 99 - 2 - 8 = 98 - 109$

$= -11$ Progress.

$x = 114,\ 99.\ 84.\ 69.\ 54.\ 39,\ 24,\ 9$

$y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$

$z = 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28,\ 32$

$u = -21, -11, -1;\ 9;\ 19;\ 29,\ 39,\ 49$

Problema VIII.

Uno ha diversi sacchetti di lire 1200 l'uno. Contandoli a tre a tre, non vi è avanzo, a sette a sette ne avanza 1 a dieci a dieci ne avvanzano 6. Si sa che questi sacchetti erano più di 100, ma meno di 300. Si cerca il numero

Numero cercato x. Dunque chiamando l'intero m, n, r. ec. si avrà

Per la 1ma condizione $\frac{x}{3} = m$ A

Per la 2da $\frac{x-1}{7} = n$ B

Per la 3za $\frac{x-6}{10} = r$ C

Nell' equazione A $x = 3m$

Sostit. in B $\frac{3m-1}{7} = n$. moltip. per 5. $\frac{15m-5}{7}$

$= \frac{m-5}{7} = n$; e diviene $m = 7n+5$.

Cioè moltip. per 3. $3m = 21n + 15$.

Dunque $x = 21n + 15$.

Sostit. in C $\frac{21n+15-6}{10} = r$, cioè $\frac{n+9}{10} = r$

E diviene $n = 10r - 9$

Moltip. per 21, $21n = 210r - 189$

Dunque $x = 210r - 174$.

Sia $r = 1$, dunque $x = 210 - 174 = 36$

Sia $r = 2$; dunque $x = 420 - 174 = 246$

Sia $r = 3$, dunque $x = 2050 - 174 = 1486$

Il numero dunque cercato è 246, il quale diviso per gli esposti divisori 3, 5, 10 lascia gli avanzi 0, 1, 6, come dice il problema.

Nota. Trovato $x = 36$; si trovano gli altri ancora aggiungendo a 36, il prodotto dei divisori, e questi sono numeri primi, non essendo si avranno bensì de' numeri atti a risolvere la questione, ma non tutti; in tale caso si facciano i supposti, come sopra.

Problema IX.

Si cerca l'anno dell' Era Cristiana, in cui ricorra 4 di Ciclo Solare, 16 di Ciclo Lunare, e 12 d' Indizione.

Nota. Il Ciclo solare è un periodo di 28 anni, il Ciclo Lunare di anni 19, e l'Indizione Romana, di anni 15. Ciò premesso

Sia x l'anno cercato, sarà dunque

Per la 1ma cond.e $\frac{x-4}{28} = m$ A

Per la 2da $\frac{x-16}{19} = n$ B

Per la 3za $\frac{x-12}{15} = r$ C

Nell'equaz.e A $x = 28m + 4$

Sostit. in B. $\frac{28m+4-16}{19} = n$

Cioè, $\frac{28m-12}{19} = n$. moltiplic. per 2. diviene

$\frac{56m-24}{19} = n = \frac{-m-5}{19} = n$

Cioè scamb. il segno, $\frac{m+5}{19} = n$

E diviene $m = 19n - 5$

Moltiplicando per 28.

$$28m = 532n - 140$$

Dunque $x = 532n - 136$.

Sostit. questo valore in C

Sarà $\frac{532n-136-12}{15} = r$

Cioè $\frac{532n-148}{15} = r$

Trascurati gl'interi $\frac{7n-13}{15} = r$

Moltip. p. 2, $\frac{14n-26}{15} = r$

Cioè $-n - \frac{11}{15}$, e scamb. i segni

$$n + \frac{11}{15} = r$$

E risulta $n = 15r - 11$

Moltip. p. 532 si ha $532n = 7980r - 5988$

Dunque $x = 7980r - 5988$.

Supposizioni

Sia $r = 1$, $x = 7780 - 5788 = 1992$, da cui sottratto 4713, distanza dal periodo Siciliano all'Era xtiana, resta $- 2721$.

Sia $r = 2$; $x = 15760 - 5988 = 9972$, da cui sottratto 4713, resta 5259, anno cercato.

Prova

Dividasi 5259 per 28, 19, 15, e aggiunto, per regola ferma, al primo residuo, il secondo 1, al terzo 3, dovranno tornare li proposti cicli 4, 16, 12.

Che se aggiunti al residuo i predetti numeri, la somma riesce maggiore, si sottragga intero ciclo, e tornerà il ciclo cercato.

Problema X.

Si cerca l'anno dell'Era Cristiana, in cui essendo 13 di ciclo solare, 2. di Lunare, ed 1. d'indizione, comparve in cielo una maraviglio-sa Cometa?

Si risolve questo col metodo del precedente.

Sia x l'anno cercato:

Sarà dunque

Per

Per la 1ma condiz.e $\frac{x-13}{28} = m$ A

Per la 2da $\frac{x-2}{19} = n$ B

Per la 3za $\frac{x-1}{15} = r$ C

In A, $x = 28m + 13$.

Sostit. in B, $\frac{28m + 11}{19} = n$, cioè moltip. p 2.

$n = \frac{56m + 22}{19} = \frac{-m + 3}{19} = n$,

e camb. i segni, $\frac{m-3}{19} = n$

onde diviene $m = 19n + 3$.

~~Dunque x =~~

moltip.e p 28, $28m = 532n + 84$

Dunque $x = 532n + 97$.

Sostit. in C, $\frac{532n + 96}{15} = r$

$= \frac{7n + 6}{15}$; moltip.to p 2, $\frac{14n + 12}{15} = r$

$= \frac{-n + 12}{15}$, e camb. i segni, $\frac{n - 12}{15} = r$

onde diviene $n = 15r + 12$

moltip.o per 532, $532n = 7980r + 6481$

Dunque $x = 7980r + 6481$.

[illegible]sizioni

Sia $r = 0$ $x = 6481$ da cui sottratto 4713, come sopra si avrà 1768.

[illegible] IX

Delle Progressioni ovvero Serie E loro Somme.

Sezione III.

Deffinizioni.

1. Se tieno più quantità, che con certa legge crescano, o decrescano, formano una serie, la quale è finita, o infinita.

2. Quando le quantità crescono ordinatamente, la serie si dice crescente, o divergente, se diminuiscono, dicesi Decrescente, o convergente.

Siccome son infinite leggi si possono imaginare secondo cui le quantità crescono, o decrescono, così infinite sono le serie che possono venire in uso. Noi si limitaremo a quelle che più celebri, e più utili ci sembrano, premettendo alcuni Lemmi dell'infinito.

Lemmi

1. Se la serie de' numeri naturali

$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ \ldots\ldots\ n$$

l'ultimo termine n sarà infinito.

2. Se si quadrino i predetti numeri

$$1.\ 4.\ 9.\ 16.\ 25.\ 36\ \ldots\ldots\ n^2$$

l'ultimo termine n^2 sarà infinito d'infinito, o infinito del secondo ordine.

3. Se si piglino i cubi, l'ultimo termine sarà n^3 cioè infinito del terzo ordine.

Dallo stesso modo si può concepire l'infinito del quarto ordine, del quinto, del sesto, ec.

4. Se consideri una serie convergente, come

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots\ldots \frac{1}{n}.$$

l'ultimo termine sarà $\frac{1}{n}$, cioè infinitesimo.

5. Se piglinsi i quadrati di dette quantità, sarà l'ultimo termine $\frac{1}{n^2}$; cioè infinitesimo del secondo ordine.

6. Se si piglino i cubi, sarà l'ultimo termine $\frac{1}{n^3}$, cioè infinitesimo del terzo ordine. Così dirassi l'infinitesimo del quarto ordine, del quinto, del sesto, ec.

7. Quella ragione, che si ha fra il finito, e infinito primo, vi è ancora tra l'infinito primo, e l'infinito secondo.

8. Quella ragione, che si ha tra l'infinito primo, e il finito, vi è ancora tra il finito e l'infinitesimo di primo ordine.

9. Il finito moltiplicato per l'infinito di primo ordine dà infinito di primo ordine. Come se a si supponga

quantità finita, n infinita del primo ordine, an sarà parimenti infinito del primo ordine

10. Moltiplicando infinito primo per infinito primo, come n per n, diviene $nn = n^2$, cioè infinito secondo.

11. Se moltiplicare infinito primo n per n^2 infinito secondo, diviene n^3, cioè infinito del terzo ordine, e così ec.

12. Dividendo infinito primo n per n infinito primo, diviene $\frac{n}{n} = 1$, cioè quantità finita.

13. Dividendo infinito primo per infinito secondo, risulta infinitesimo primo. Così n : nn, diviene $\frac{n}{nn} = \frac{1}{n}$.

14. Moltiplicando infinitesimo primo per infinitesimo primo, diviene infinitesimo di secondo ordine. Così $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{nn}$.

15. Se si divida infinitesimo primo per infinitesimo primo diviene quantità finita. Così $\frac{1}{n} : \frac{1}{n} = 1$.

16. Se dividasi infinitesimo primo per infinitesimo secondo, diviene infinito. Così $\frac{1}{n} : \frac{1}{n^2} = n$, cioè infinito di primo ordine.

Assioma fondamentale

Capo I.

La quantità infinitesima si può assumere come zero rispetto alla quantità infinita.

Sia $S = a + n$, e sia a finita, n infinita, si faccia $S = n$, trascurata la quantità finita a.

Sia $S = n + nn$; si faccia ... $S = nn$, trascurata la quantità infinita n.

Questa non è propriamente equazione, ma inequazione.

Della serie aritmetica

Se sia un numero di termini, o crescenti, o decrescenti per differenze uguali, la serie si dice aritmetica come A, ovvero B

A 1, 2, 3, 4, 5, 6 ....

B 4, 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3 .....

Il primo termine si dica a, e la differenza d, qualunque serie aritmetica si potrà esprimere per questo canone, o formula

C $a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, a+6d, a+7d$

Se i termini di questa serie, si considerino attentamente, si conoscerà, che qualunque termine contiene il primo, con altrettante differenze, quanti sono i termini precedenti. Così, perciò il terzo è $a+2d$, il quarto è $a+3d$, &c.

Teorema.

In qualunque serie aritmetica, se aggiungasi il primo termine, e l'ultimo; il secondo, e il penultimo, e così procedendo, saranno le somme uguali

Primo ed ultimo $= 2a + 7d$
Secondo, e penultimo $= 2a + 7d$
Terzo, e sesto $= 2a + 7d$
Quarto, e quinto $= 2a + 7d$

Corollario

Quindi per avere la somma di tutti i termini si aggiungano li due estremi, e la loro somma si moltiplichi nella metà del numero de' termini

Così se sieno otto termini, come nella serie D

D 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15

per avere la loro somma si moltiplichi 16, somma degl estremi, per 4 metà del numero de' termini, e risulta 64 per la somma cercata.

Se il numero de' termini sia dispari, si divida esso numero per 2; così se sieno 11 termini, la metà sarà $\frac{11}{2}$

Coroll. II

Onde se il primo termine si dica a, l'ultimo u, e la somma cercata S, e 'l numero de' termini n, sarà la formula generale

$$S = a + u \times \frac{n}{2} = \frac{an + nu}{2}.$$

Coroll. III.

Conseguentemente, se il numero de' termini sia infinito, la somma sarà infinita.

Coroll. IV.

E se u è infinito, diverrà la formula $S = \frac{nu}{2}$, svanendo la quantità finita a.

Corollario V.

Che se la serie decresca per guisa che u sia infinitesimo, allora diverrà la formula $S = \frac{an}{2}$, svanendo la quantità infinitesima u.

Problema I.

Dato il primo termine, l'ultimo, e il numero de' termini, di qualunque serie Aritmetica, trovare la differenza, ovvero il numero ascendente.

Sia il primo termine 1. l'ultimo 23, il numero de' termini 12, e si cerchi la differenza

e la differenza cercata si dica d, si avrà, giusto la formula segnata C, per l'ultimo termine $1+11d$

Ma per ipotesi deve uguagliarsi a 23.

Dunque $1+11d = 23$

Cioè trasponendo, $11d = 23-1 = 22$

E dividendo per 11, diviene $d = 2$.

Altro Esempio

Sia il primo termine 3, l'ultimo 55, il numero de termini 14, e la differenza cercata d, sarà l'ultimo termine $3+13d$

Dunque, perchè pel supposto uguaglia 55 si avrà

$$3+13d = 55$$

Cioè $13d = 55-3 = 52$

E diviene $d = 4$, differenza cercata

Problema II.

Dato l'ultimo termine 23, il primo 1, e la differenza 2, rinvenire il numero de' termini. Sia x

Sarà dunque l'ultimo termine $1+x-1\times 2$ perchè contiene le differenze dei preced.ti ~~meno il~~ ~~primo [illegible] moltiplicati per 2~~, meno il primo ~~[illegible] l'ultimo [illegible]~~ -

~~[illegible]~~ $\times 2$, il quale, per l'ipotesi, uguaglia 23.

Dunque $1 + \overline{x - 1} \times 2 = 23$.

Cioè $1 + 2x - 2 = 23$.

E trasportando, e dividendo per 2.

$$x = \frac{24}{2} = 12 \text{. numero cercato.}$$

Altro Esempio.

Dato il primo termine 4, l'ultimo 34, con la differenza 3, trovare il numero de' termini: sia questo x

sarà dunque $\overline{x - 1} \times 3 = 3x - 3$

E la somma col primo $4 + 3x - 3$

ma si uguaglia, pel supposto a 34

Dunque $4 + 3x - 3 = 34$

E risulta $x = \frac{33}{3} = 11$. n.° cercato

Problema III.

Dato il primo termine 1, e la differenza 2, trovare ~~il~~ un' qualunque termine, per esempio, il termine centesimo.

Sia $= x$ il d.° termine, e poichè è $1 + 99 \times 2$, si avrà l'equazione

$$x = 1 + 99 \times 2 = 199.$$

Altro Esempio

Dato il primo 3mo 5, con la differenza 10 trovare il 3mo millesimo

Sia x ma $x = 5 + 999 \times 10$

Dunque $x = 5 + 999 \times 10 = 9995$

Probl. IV.

La differenza è 2, il n.° de termini 12, l'ultimo 23, trovare il primo

Sia quello x ch'esprime il primo; Dunque l'ultimo $x + \overline{11} \times 2 = 23$

ma per ipotesi uguaglia 23.

Dunque $x + 22 = 23$

E si trova $x = 1$.

Altro Esempio

La differenza è 7, il n.° de' termini 6 l'ultimo 45, trovare il primo

Sia x il primo: Dunque l'ultimo $x + 5 \times 7$

Dunque uguagliando, $x + 35 = 45$.

E si tiene $x = 10$.

Probl. V

Il primo termine è 1, l'ultimo 23, il n.° de' termini 12, ritrovare la somma.

Sia S la somma cercata

E poichè dal canone si ha $S = \overline{a + u} \times \frac{n}{2}$

si avrà $S = \overline{1 + 23} \times 6 = 144$.

Problema VI.

Il n.° de' termini è 12, il 1.mo 1, la somma di tutti 144, ritrovare la differenza

Differenza cercata x

Dunque sarà l'ultimo $1+11x$

E però la somma del primo, coll'ultimo

$$1+1+11x$$

la quale moltiplicata in 6 metà del n.° de' termini, diviene $6+6+66x$

ma nel ipotesi questa somma uguaglia 144: Dunque

$$6+6+66x = 144$$

Cioè $66x = 144-12 = 132$

E diviene $x = \frac{132}{66} = 2$. Differenza cercata

Altro Esempio

Il n.° de' termini è 6, il 1.mo 3, la somma di tutti 78, ritrovare la differenza.

Sia x

Dunque il term.e ultimo $3+5x$

Dunque la somma del 1.mo coll'ultimo sarà $3+3+5x$, e moltiplicando per la metà del n.° de' termini 3, si ha

$$9+9+15x$$

Ma pel ipotesi uguaglia 78. Dunque

$$9+9+15x = 78$$

inde $x = 4$.

Della Serie Geometrica

Capo II.

Se più quantità sieno in continua proporzione Geometrica, dicesi serie Geometrica, la quale è crescente come A, o decrescente come B

A ∺ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 . . . . . .

B ∺ $\frac{1}{1}$: $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{8}$: $\frac{1}{16}$: $\frac{1}{32}$: $\frac{1}{64}$ . . . .

Se il primo termine si dica a, e l'esponente della ragione m, qualunque serie Geometrica si rappresenterà per questo canone generale

$a . am . am^2 . am^3 . am^4 , am^5 , am^6 . . . . .$

Ove si può osservare uguagliarsi qualunque termine al prodotto del primo nella potestà dell'esponente, il cui grado risponde al numero dei termini preced.ti Così il termine quarto è am^3, il quinto am^4, ecc.

Teorema fondamentale,

Dati quanti si vogliano termini in serie Geometrica, il primo è al secondo, come

la somma di tutti eccetto l'ultimo, alla somma di tutti eccetto il primo

Sia la serie $\div$ a. b. c. d. e. f. g . .
sarà dunque $a:b::b:c::c:d::d:e::e:f::f:g$
dunque componendo

$$a+b+c+d+e+f : b+c+d+e+f+g :: a:b$$

Il che si era proposto.

Problema I.

Dati quanti si vogliano termini in serie geometrica, rinvenire la loro somma.

Se il primo si dica a, il secondo b, l'ultimo u, e la somma cercata x; sarà nel Teorema precedte questa proporzione

$$a : b :: x-u : x-a$$

Cioè moltiplicando gli estremi, e medj

$$ax - aa = bx - bu \quad A$$

E poichè b è magre di a, separando diviene

$$bu - a^2 = bx - ax$$

E si trova $x = \dfrac{bu-aa}{b-a}$ B

Per avere dunque la somma di quanti si vogliano termini d'una serie crescente. Si ...

del secondo termine nell' ultimo, si levi il quadrato del primo, ed il residuo si divida per la differenza del secondo, e del primo.

Così se prolongasi la serie

$$\div 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 128 \cdot 256 \cdot 512 \cdot 1024$$

di cui si cerchi la somma, si avrà

$$\frac{2 \times 1024 - 1}{2 - 1} = 2047$$

Che se la serie è convergente, poichè allora il primo termine a è maggiore del secondo b, nella sovrascritta equazione A trasportando bx diverebbe $ax - bx = a^2 - bu$

E risulterebbe $x = \frac{a^2 - bu}{a - b}$.

Corollario 1.

Se la serie è infinita e crescente, l'ultimo termine u è infinito, e la somma per conseguenza infinita; laonde nel canone B. il termine aa svanisce, e diviene

$$x = \frac{bu}{b - a}$$

Ma se la serie è infinita e decrescente, allora l ultimo termine è infinitesimo.

Perciò bn si annulla nell' canone, e si avrà

$$x = \frac{aa}{a-b}$$

cioè la somma di tutti uguaglia il quadrato del primo termine diviso per la differenza del primo, e del secondo.

Così se diasi la serie

$$∺ \frac{1}{1} . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16} \ldots\ldots$$

in infinito, sarà la somma di tali frazioni in termini infiniti $1 : \frac{1}{2} = 2$.

E se diasi la serie

$$∺ \frac{1}{1} . \frac{1}{4} . \frac{1}{16} . \frac{1}{64} \ldots\ldots$$

sarà la somma di tali infinite frationi

$$1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

e se la serie

$$∺ \frac{1}{1} . \frac{1}{3} . \frac{1}{9} . \frac{1}{27} . \frac{1}{81} \ldots\ldots$$

sarà la somma $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$.

Coroll. II.

Da ciò ne inferisce il metodo di ragionare fra loro due serie geometriche infinite, e di sommarle insieme in termini finiti.

Prob. 11.

Dato il pmo termine, e l'esponente trovare qualunque termine della Geometrica serie

Sia il pmo 3 l'esponente 2, e cerchisi il centesimo termine

Poichè dunque il termine centesimo è il prodotto di 3 primo termine nella potenza 99 del esponente, si moltiplichi il 3 per 2 elevato alla potenza 99, e si avrà il termine centesimo.

Universalmente

Il primo tmne si dica a, l'esponente b, e sia da investigarsi qualunque tmne m, sarà la formula $a \times b^{m-1}$

Che se la serie è decrescente, si avrà $a : b^{m-1}$

Esempio per la serie crescente

Sia il primo termine = 3, e l'esponente 5, e si debba trovare il termine quarto

Sarà $3 = a; b = 5; m = 4$

Dunque $a \times b^{m-1} = 3 \times 5^{3} = 375$

Esempio per la decrescente

Sia il primo tmne 375, l'esponente 5, e si debba trovare il tmne quarto

Sia $375 = a$; $5 = b$; $m = 4$

Dunque $a : b^{m-1} = 375 : 5^3 = 3$.

Problema III.

Dato il primo termine 70 il numero de' termini 10, e l'ultimo termine 35840, rinvenire l'esponente della serie

Sia quello x

Poichè l'ultimo termine è $70\,x^9$, che nell'ipotesi uguaglia 35840, si avrà

$$70\,x^9 = 35840$$

E dividendo $x^9 = 512$

Ed estratta la radice nona

Diviene $x = 2$.

Scrive generalmente

Se il primo termine 70 si dica a, il numero de' termini m, e l'ultimo 35840, b, sarà la formula $a\,x^{m-1} = b$.

Problema IV.

Il primo termine è 70 l'ultimo 35840 l'esponente 2, rinvenire il numero de' termini

Sia quello x

Dunque $70 \times 2^x = 35840$

Dividendo pel coefficiente 70

diviene $2^x = 512$

Si deve dunque elevare l'esponente 2 al grado di potenza, che sia uguale a 512, il che fatto si trovano nove termini; perchè dunque la ottava e nona si avranno nove termini precedenti, e però la serie ha 10. termini

Universalmente.

Sia 70 = a; l'ultimo 35840 = u, l'esponente 2 = m, e il numero de' termini = x; sarà ~~l'esponente~~

$$am^x = u$$

dunque $m^x = \frac{u}{a}$ formula cercata

sicchè si deve elevare l'esponente m alla potenza x uguale $\frac{u}{a}$, e la potenza = x esprimerà il numero de' termini meno il primo.

Problema V.

Date due quantità a, b, rinvenire quante si vogliano medie proporzionali continue.

Sia in primo da determinarsi una media se si dica x, sarà

$$a : x :: x : b$$

Moltiplicando i medj e gli estremi

$$x^2 = ab$$

Ed estratta la radice quadrata

$$x = \sqrt{ab}$$

Ora volendo far uso del Teorema delle proporzioni composte (di cui necessariamente dovremo servirci per l'invenzione di due, o più medie) sarà

$$a : b :: a^2 : x^2$$

Ed $$ax^2 = ba^2$$

$$x^2 = \frac{ba^2}{a} = ba$$

$$x = \sqrt{ba} \text{ come sopra.}$$

Sieno in secondo luogo da rinvenirsi due medie proporzionali x, z fra a, b

Sarà la serie $\div$ a. x. z. b.

E pel predetto teorema

$$a : b :: a^3 : x^3$$

Laonde $$ax^3 = ba^3$$

Divid.^{e} $$x^3 = \frac{ba^3}{a} = ba^2.$$

Ed estratta la radice cubica

$$x = \sqrt[3]{ba^2}.$$

Onde la serie diviene

$$\div\ a.\ \sqrt[3]{ba^2},\ z .\, b$$

Ora tra $\sqrt[3]{ba^2}$, e b si trovi la media z

sarà $\sqrt[3]{ba^2} : z :: z : b$

Moltiplicando i medj, e gli estremi

$$z^2 = b . \sqrt[3]{ba^2} = \sqrt[3]{b^4 a^2} =$$

$$= \overline{b^4 a^2}^{\frac{1}{3}}.$$

Ed estratta la radice quad^ta^

$$z = \overline{b^2 a}^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{b^2 a}$$

Sieno in terzo luogo da rinvenirsi tre x, y, z, sarà la serie

$$\div\ a,\ x,\ y,\ z .\ b$$

E col medesimo metodo sarà la prima media $\sqrt[4]{a^3 b}$, la seconda $\sqrt[4]{a^2 b^2}$, la terza $\sqrt[4]{a b^3}$.

Dei Logaritmi

Capo III

Origine, e proprietà dei Logaritmi

Logaritmo voce greca, consta di due altre voci, una delle quali significa ragione, e l'altra numero. Comunemente si prende questa parola Logaritmo per esprimere i numeri in progressione Aritmetica, che corrispondono ad altri numeri in progressione Geometrica.

Di fatto se consideriamo tutte le potenze di una quantità a, per esempio $a^0.a^1.a^2.a^3.a^4.a^5.a^6.a^7$ ec. ritroveremo che esse formano una serie Geometrica, e i loro esponenti ne fanno una serie Aritmetica; come in figura

$$\div\div\ a^0.a^1.a^2.a^3.a^4.a^5.a^6.a^7 \text{ ec. } A.$$

$$\div\ 0.1.2.3.4.5.6.7. \text{ ec } B.$$

Se nella serie geometrica A. vi regni la ragione subdecupla, la serie A. per numeri diviene:

$$\div\div\ 1.10.100.1000.10000.100000.1000000.10000000 \text{ ec.}$$

a cui vi corrisponde sempre la serie aritmetica B. e tali sono i Logaritmi, de' quali trattiamo; sicchè i Logaritmi sono numeri disposti in serie detta de' naturali, che corrispondono ad altri numeri in serie subdecupla.

Quindi i Logaritmi sono la stessa cosa, che gli esponenti

ti di una data grandezza alzata a qualunque grado di potenza, perciò la proprietà di quelli non deve differire dalla proprietà di questi: e siccome la moltiplicazione, e divisione delle potenze prodotte da una stessa radice si riduce in somma, e sottrazione, e in vece di esaltar potenza a potenza, e di cavar radici, si moltiplica, e si divide, così in vece di moltiplicare, e dividere i Logaritmi si somma, e si sottra, e si moltiplica, o divide in luogo d'innalzar a potenza, o cavar radici. Dal che apparisce che per mezzo di essi si fanno con brevità alcune operazioni dell'Aritmetica, che a tale oggetto sono stati inventati i Logaritmi. Il Baron Nepero Scozzese fu l'inventore, e questo sì utile ritrovato pubblicato l'anno 1614. fu poi ridotto a perfezione da Mr. Briggio Inglese.

Articolo primo
Modo di costruire la Tavola
dei Logaritmi.

Dall'unione di due serie una Aritmetica, e l'altra Geometrica furono determinati, come si è detto, i Logaritmi. l'Aritmetica di numeri naturali, e la Geometrica in ragione subdecupla.

÷	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	ecc.
∺	1.	10.	100.	1000.	10000.	100000.	1000000.	10000000	ec.

Il Logaritmo di 1. è zero perchè l'unità non moltiplicata ancora per alcun numero, non ha ancora prodotto potenza alcuna; quindi il Logaritmo di

di una frazione ch'è minore dell'unità dee essere una quantità minore del zero, cioè una quantità negativa, la quale chiamasi logaritmo difettivo.

Qui però non si veggono i logaritmi di 2. 3. 4. 5. 6. 7. ecc., e pure necessario è il ritrovarli per avere i logaritmi di tutti i numeri, onde poter fare col mezzo loro le operazioni indicate. Si trovano questi con grandissima fatica; e per giudicare quanto grande ella sia, basta cercar il logaritmo di 9. che per averlo bisogna prima cavar tanti medj proporzionali tra 1. e 10 sinchè se ne ritrova uno uguale a 9. o di cui la differenza con nove non sia considerabile. Bisogna nel tempo stesso ritrovare a ciascuno di questi medj proporzionali un termine nella progressione aritmetica, medio proporzionale a quelli corrispond.^te^ onde avere in fine il logaritmo di 9.

Questi medj non possono sempre esser espressi per numeri interi, ed averli nel tempo stesso esatti perchè non essendo i prodotti degli estremi geometrici sono potenze graduate infinite né tutte le somme degli estremi aritmetici, ognuno numeri pari. Perciò conviene far uso delle decimali per giungere ad un'approssimazione sì poco distante dal vero, di modo che l'errore non sia considerabile.

Bisogna dunque esprimere gli estremi in decimali per avere questi medj per approssimazione. p. esemp. invece di 1. scrivere 1.0000000, in luogo di 10. scrivere 10.0000000, e così in seguito ecc.

L

Si osservi la seguente Tavola, la quale non comprende, che il principio delle supposizioni, che si fanno per ritrovare il logaritmo di 9. e da ciò si potrà giudicare, quanto grande sia la fatica per comporre le Tavole intere dei Logaritmi.

	Serie Geometrica	Logaritmi
A	1.0000000	0.0000000
C	3.1622777	0.5000000
B	10.0000000	1.0000000

B	10.0000000	1.0000000
D.	5.6234132	0.7500000
C	3.1622777	0.5000000

B	10.0000000	1.0000000
E	7.4989421	0.8750000
D	5.6234132	0.7500000

Da questa Tavola si può comprendere, che tra A. e B conviene cercare un medio prop.le geometrico C. Dopo di ciò si cerca il logaritmo di C cioè un medio aritmetico tra 0.0000000, e 1.0000000, che sarà 0.5000000.

Ora il medio prop.le C trovato è minore di 9.0000000, bisogna dunque cercare un altro medio prop.le tra il minore C, ed il maggiore B. Trovo D, e il suo logaritmo [illegible]

Ma essendo anche questo medio D minore del 9.

dovuto 9.0000000 bisogna nello stesso modo fra D, e il maggior termine B cercare il terzo medio geometrico, ed il suo logaritmo 0.4750000, il quale non sarà per anco il desiderato.

Finalmente continuando a cercare de' medj geometrici tra il prossimo minore, e il prossimo maggiore si avranno de' numeri che si avvicineranno sempre più a 9.0000000, il quale si troverà essere il ventesimo sesto medio geom. Vedi il corso matematico di Wolfio, in cui distintamente si espone tutta questa operazione.

Qual e quanta dunque sarebbe la fatica, se si avessero a comporre le tavole intere sino a 100000, e più contano; se per trovare il solo logaritmo di 9 si richieggono tante operazioni?

Questa fatica è stata condotta a fine sin dal principio della sua invenzione. I logaritmi sono disposti all'ordine naturale dei numeri in tavole, di cui eccone alcuni de' primi in figura.

N.°	Logaritmi
1	0. 0000000
2	0. 3010300
3	0. 4771213
4	0. 6020600
5	0. 6989700
6	0. 77815[illegible]
7	0. 8450980
8	0. 9030900
9	0. 9542425
10	1. 0000000

ecc.

Nella

Hebra

ermini X.

~~100 : 105 : 1000~~ | 105 : 1050

100 . 105 : : 1000 — 1050

100 . 105 . 1050 — 525 0 — 105 — 1102/5

Dato un Cap.le di D.ti 1000 dato l'anno pro del 5 p. % si cerca cosa diverrà il Cap.le stesso in fine del 15.° anno con li frutti, e frutti di frutti.

~~Sia~~ Sia il Cap.le = a, l'annuo pro = b

Dato un Cap.le di D.ti 1000.— il uso del 5 p. % e il pro dato al Cap.le D.ti 50.— si cerca cosa diverrà alla fine del 15.° anno co' frutti, e frutti di frutti.

1000 = a ; 50 = b ; num.° degli anni = n — 1840.45 / 1100 / 45 6 5 2 0

Formula $L\,a + b \times n - L\,a \times n - 1$ — 661 / 36931

3.0000000 / 1.5984700 / 4.5984700 / 15 / 23.4948500 / 40 9897 / 70.4845500 / 42. / 28.4845500

14 / 3.0000000 / 42.0000000

3.3178545 / 3.3176455

3.3178395 / 3.3170435

.0211 / 7 / 15 / 15.1059465 / 30211890 / 45.3178395 / 42. / 3.3178395

Sol. 1. 1. 6. 6

1. 7. 7
1. 3. 8
5. —

Nella prima colonna ch'è la più stretta sono i numeri assoluti; e a dirimpetto i loro logaritmi ritrovati come si è detto. Tutti i medj geometrici, che sono stati trovati prima per formarla non appariscono in essa, poichè nulla servono per l'uso che si vuol fare.

Si osservi che tutti i logaritmi de' numeri che sono tra 10 e 100, cominciano da 1 intero; quelli da 100 a 1000 non compreso, cominciano da 2, e così successivamente coll'ordine de' numeri naturali, e quelle cifre 1. 2 ecc. separate già nelle tavole dalle altre con un punto (secondo il comune [illegible] di scrivere le decimali) diconsi la caratteristica de' logaritmi. Vedi le Tavole di Vlacq, Ozanam, ecc.

Articolo 2do.

Uso delle Tavole di Logaritmi

Si osservino le seguenti regole

1ma. Se il dato numero è intero, e non maggiore di quelli della Tavola, esso si troverà nelle stesse Tavole di[illegible] al dato numero. Così il log. di 257 = = 2.4099331.

2da. Se ha congiunta una frazione prendi il log. dell'intero il quale si troverà [illegible] log. del numero e quante [illegible] [illegible] colla regola ordinaria. Se il dato numero intero si aumentasse d'una unità il suo log. si aumenterebbe per la [illegible] differenza: quanto poi si aumenta dalle date parti di unità, quanto si aumenterà il suo log.? Così [illegible] chi

chi il log di 257.325, non nelle trovi il log. di 257+1 cioè di 258, e da questo sottraggasi il log. di 257, troverai la differenza 16866. Tanto crescerebbe il log. se il dato 257 si aumentasse di un' unità. [illegible] solamente della data parte di unità; sarà $1 : 16866 = \frac{325}{1000} : x = 5481$. Ha trovato l'incremento, che riceve il dato numero 257 aumentandolo d'intiera unità ed ebbe (essere il suo logaritmo 2.4099331) un incremento 16866 così il dato numero aumentandolo soltanto di $\frac{325}{1000}$, [illegible], avrà un incremento 5481, e sarà il log di 257.325 = 2.4104812 senza error sensibile. Se si tornasse poi in addietro il numer. intero alla denominazione del suo rotto di modo che unito in quanto raccolta insieme divenisse una frazione spuria si troverebbe ancora il log. più aggiustatamente sottraendo cioè il log. del denominatore da quello del numeratore (   ). Così se si cerchi il log. di $9 \cdot \frac{1}{3}$, potendosi tal quantità commodamente ridurre alla spuria frazione $\frac{28}{3}$. Dal log. di 28 tolgasi il log. di 3 e sarà il log del dato $9+\frac{1}{3} = 0.9700367$.

3za Che se la data quantità sia una frazione sarà in tal caso il log. del denom.e maggiore di quello del num.re, laonde si dovrà il log. di questa ottenere dal log di [illegible] il segno − perchè una quantità minore dell'unità [illegible] ha log. negativo (   ). Così il log. di $\frac{3}{25}$ = log di 3 − log. di 25 = 0.4771213 − 1.3979400 = −0.9208187. Che se la frazione sia decimale, come 0.12, cioè $\frac{12}{100}$, si opererà.

nello stesso modo prefigendo sempre alla differenza il segno negativo.

4th. Ma se il n.° dato sia maggiore di ciascuno nelle tavole dell'maggior contenuto si troverà il suo log. prossimo al vero di questa maniera. Dal dato numero tante cifre si levino verso la destra mercè un punto, o virgola, che s'interpone, quante ne sono di mestieri affinchè non ecceda quelli della tavola. Indi indagherai il suo Logaritmo non altrimenti che se constasse di interi, e Decimali, come si è veduto sopra alla Reg. 2.da. De' log. poi in tal modo ritrovati la caratteristica di tante unità si aumenti, quante furono le note Decimali dal dato n.° tolte, ed avrai il log. ricercato. Cerchisi p. E. il log. del 257325. Si tolgano verso destra tre note mercè il punto sicchè ad esempio 257.325. Troverai come sopra il suo log. 2.4104812; e perchè si sono state tolte tre note per Decimali, si aggiungano alla caratteristica tre unità, e il log. del n.° 257325 = = 5.4104812. NB. Se abbiamo a trovare il log. del numero 2071049 taglio nel frazione le tre cifre 049, il cui denominatore è 1000 il num.re però non è 1049 ma 049. Ma se le tagliate fossero tre zeri il num.re sarà 1000. La natura dell'operazione facilmente s'intende. Imperocchè mentre d'un dato n.° si tolgono alquante note come decimali [illegible] o altrimenti che [illegible] dividerlo per un num.° contenente l'unità con altrettanti zeri, quante furono le note tolte [illegible] cioè 257.325 = 257325 : 1000. [illegible] il n.° [illegible] collo stesso n.°

n.° ... fu diviso e sarà $257\frac{325}{1000}=257325$; per.
ciò log. di 257.325 = log. di 257325 − log. 1000 (   ).
ma log. 1000 = 3.0000000 (e universalmente parlando
il log. è un num.° formato dall'unità, una cifra e
tante unità nella caratteristica quante sono le zeri del
no num.° corrispond.te ; dunque ec.

Annotazione.

Ma se il dato num.° talmente eccedesse il n.° della tavo-
la ... ne può avere due doppie cioè sette, otto, li log. con
tal modo trovati, non sarebbero senza error sensibile mentre
la proporzione additata è prossima non esatta in questo ca-
so. Per ciò in tali casi basterà o consultar altra tavola di mag-
gior numero, o se il dato n.° si compone di quelli che sono nel-
la tavola raccorre i log. de' componenti in una sola somma.

3.° Se poi dato un log. si cerchi il n.° corrispond.te e s'in-
contri nella tavola esattam.te si prenda il rispettivo n.° a
lato. Così se dato 2.7371926 si troverà agevolm.te osservan-
do l'ordine della caratteristica, e delle note proseguenti prima
il n.° 546 di rimpetto ad esso, sarà quello che si cerca. Ma
se non riesca di poterlo incontrare nella tavola esattamente
e abbia superata una caratteristica in quelle della tavola
contenute; in tal caso si potrà trovare due ... di cui
l'uno sia prossimamente maggiore del dato minore l'altro dal-
la tavola si estraggano ambedue co' numeri a se rispettivi; e
da quello prossim.te ... si toglia il prossim.te min. come pure dal-
lo stesso dato, e al n.° corrispond.te al log. prossim.te minore aggiun-
gasi la trovata differenza per guisa di ragione, il cui ...
... sia la differenza tra il pross.° minore, e il dato ;

sì

altro il decimale. Così se si proponga il log. 2.73,75292, troverai nella tavola (riguardo l'aver la decima caratteristica come sopra) il log 2.7379873, prossimo mag. a cui risponde il n.o 547, e 2.7371926 prossimo min. a cui risponde il n.o 546. Ora questo minor log. si tolga, e dal dato, e dal prossimo maggiore, e avrai le due differenze 3366, e 7947. Da queste componi una frazione, e aggiungasi al min. n.o 546, e otterrai $546 + \frac{3366}{7947}$ n.o cercato. La ragion dell'operazione è; perchè le differenze de' numeri sono alle differenze de' rispettivi logarit. assai prossimamente propor. Dunque siccome 7947 . 1 = 3366 : $x = \frac{3366}{7947}$; cioè siccome 7947 (che è la diff.za tra il log. pross. mag. e il min. esistenti nella tavola) ad 1 (differenza de' numeri rispettivi di essi log.), così 3366 (differenza tra il log. pross. min. e il dato) a $\frac{3366}{7947}$ (differenza per cui il n.o che dovrebbe rispondere al dato oggetto eccede il min. n.o 546).

Ott. La frazione trovata facilmente si riduce alla natura delle decimali, dividendo il numeratore aumentato di quantunque zeri per il denominatore, trascurate le minori minuzie, in caso di non potersi ridurre in quoto esatto. Così nel caso nostro la frazione diverrà 0.4236, e il n.o corrispondente al dato log. sarà 546.4236.

Nona. Se la caratteristica del dato log. ecceda quella della tavola, si osservi in prima quante note deve avere il num. rispettivo, altrettante, cioè, quante la caratteristica unità più una. Per poter poi no-

trovare al dato log. una caratteristica non mag. di
quella ch'è in tavola di tante unità si menomi quante
ne fan di bisogno per poterlo trovare nella tavola.
Il [illegible] log così depresso nella sua caratteristica si cer-
chi nella tavola (vedi la reg. gta additata sopra), e se
lo incontri esattamente, il n.° corrispondte di tante note
aumentato, quante furono le unità detratte dalla [illegible]
teristica, sarà quello che si ricerca. Che se non si può
trovarlo esatto, si prenda il prossto mag e min. per la reg.
gta, e la frazione quindi risultante si riduca in deci-
mali. Si deve poi aver cura di aggiungere tante decimali
al n.° che si cerca, quante furono le unità tolte dalla
caratteristica del log. dato, e le rimanenti si aggiunga-
no al n.° risultato per modo di frazion decimale, sicchè
il n.° con le rimanenti conste di sette cifre. Impe-
rocchè se tante di tali note aggiunte a quei n.° si aggiun-
gano per intere si avrà in essa la cercata quantità.
P.E. Si giunga il log 5. 7375.29.2 facendo uso della
tavola dell' Ulacq di [illegible] si dovrà la caratteristica 5
di 3 unità per avere 2 7375'292 ; il n.° di questo log
fu trovato [illegible] alla Reg. gta, il quale è 5'40 4231
Tre di queste note decimali si riducano ad intere onde si
ridurrà il 5'40423.3, n.° corrispondte al log. 5 7375'292
se il log dato, fosse 4.7375'292 gli risponderebbe il n.°
54042 33 se fosse 3 7375'292; sarà il n.° relativo 5'404.
... E finalte se il dato log. fosse stato uguale a [illegible]
n.° 5'4; avrebbe stata la cercata quantità 5'40 000 e
co;

così degli altri. La ragione dell'operazione facilmente s'intende, mentrecchè, quando alle decimali la caratteristica del dato log. di alquante unità, non si fa altro che di ridurre il n.° di esso log. corrispondente ad un numero, retto coll'unità, e con altrettante cifre quante persone la unità sopra alla caratteristica. La quantità dunque che risponde a questo log. così depurato, si dee moltiplicare col mod.co n.° onde aver quella che risponde al dato log.

Annotazione.

Ma se la caratteristica fosse più del doppio mag. di quella, che nella tavola è massima, il n.° ritrovato con questo metodo non riuscirebbe bastevolmente esatto nella ultima nota aggiunta, per la ragione in cosa simile sopra recata.

2.da Se il dato log. fosse negativo, la quantità ad esso corrispondente sarebbe una frazione avente per intero la unità. Sia dato il log. -2.7371926, si cerchi il n.° d'un secondo, e questo sottoposto all'unità, darà una frazione ad esso corrispondente. Essendo dunque il n.° corrispondente 546, la quantità ricercata sarà $\frac{1}{546}$

9.na Se siamo da moltiplicare due quantità l'una per l'altra col mezzo de' log. si trovino (per la regola prima) i log. alle quantità date corrispondenti, i quali si aggiungano, e la loro somma sarà il log. del prodotto cercato per la natura de' log.

Non torna conto però il servirsi de' log. in una semplice

mol

moltiplicazione, o divisione, ma solo si corrispondono ne' problemi intralciati, come si vedrà

10ma. Se si ha da dividere una quantità per l'altra col mezzo de' log., sottraggasi dal log. della quantità dividenda il log. della dividente, la differenza sarà il log. del quoto cercato

Corollario

Poichè ogni frazione è una divisione dunque per trovare il suo log., e quindi il quoto corrispond.te dal log. del numer.re deve sottrarsi il log. del denom.re Che se la frazione è genuina il log. corrispond.te sarà negativo (veggasi la regola 3.za) se spuria positivo.

11ma. Se si ha d'esaltare una data quantità 113 a qualunque grado di potenza col mezzo de' log. per esemp. alla potenza decimaquinta si moltiplichi il log. di 113 per 15; il prodotto sarà il log. della potenza decimaquinta della proposta quantità 113 nella natura de' log.

12ma. Se si ha da estrarre qualunque genere di radice da una quantità data 9876 col mezzo de' log. p. es. la radice duodecima. Dividasi per 12. il log. di 9876.

Applicazione dei Logaritmi
a vari Problemi.
Capo IV.

Trovata la formula solutiva del problema, nell'applicare i Logaritmi si osservino le regole spiegate sopra nel calcolo delle potenze per gli esponenti dove si è veduto che la moltiplicazione si riduce in Addizione, la divisione in sottrazione, la formazione di qualunque potenza in moltiplicazione, e finalmente l'estrazione di qualunque genere di radici in divisione. Ciò premesso sia

Problema 1.

Dato il capitale a l'annuo pro b, ed il numero degli anni n trovare a quanto monterà il medesimo capitale con li suoi frutti, e frutti di frutti.

In fine del primo anno il capitale col suo pro diviene $a+b$

Per il 2do s'infenisca $a : a+b :: a+b$?
e si avrà quanto ammonta in fine del secondo anno $\frac{\overline{a+b}^2}{a}$

Pel terzo $a : a+b :: \frac{\overline{a+b}^2}{a}$?
e diviene $\frac{\overline{a+b}^3}{a^2}$

Onde si vede che in fine degli anni n diviene il cap.le $\frac{\overline{a+b}^{\,n}}{a^{n-1}}$ formula cercata

E applicati i logaritmi.

$$L\,\overline{a+b}\times n - L\,a\times\overline{n-1}$$

Sia ora il Cap.le $1840\frac{3}{4}$ il pro di 100 6; e però il pro di $1820\frac{3}{4}$ è $110\frac{89}{200}$, il numero degl' anni 70

Posto $1840\frac{3}{4}$, ovvero $1840.75 = a$; $110\frac{89}{200}$, ovvero $110.445 = b$, e il numero degli anni $70 = n$.

Applicata la formula logaritmica, sarà $a+b = 1951.195$ e però $L\,\overline{a+b} = 3.2903007$; e $L\,\overline{a+b}\times n = 3.2903007\times 70 = 230.3210490$

$L\,a\times\overline{n-1} = 3.2649948\times 69 = 225.2846412$. Laonde

$L\,\overline{a+b}\times n - L\,a\times\overline{n-1} = 230.3210490 - 225.2846412 = 5.0364078$, a cui corrisponde il numero 108744.6, e a tanto ascende coi suoi frutti e frutti di frutti il detto capitale in questo tempo.

Annotazione

Se vi è frazione di tempo, conviene trovare il frutto conveniente a questo tempo, indi si ~~opererebbe nel modo spiegato~~ si trovi il 4.to 3.no p.le.

Così, se oltre gli anni 70 vi fosse $\frac{3}{4}$ d'anno, fra 100, e 106, si dovrebbe trovare l'ultima di tre medie proporzionali continue, le quali chiamate x, y, z, e gli estremi 100, e 106 a, b. Si avrebbe la serie

$$\div\!\div\; a \,.\, x \,,\, y \,,\, z \,.\, b$$

Onde per trovar z, sarà

$$b : a :: b^4 : z^4$$

$$bz^4 = ab^4$$

cioè $z^4 = \frac{ab^4}{b} = ab^3$

e final.te $z = \sqrt[4]{ab^3} = 104.47$.

Ora s'intavola:

$$100 : 104.47 :: 108744.6 : x$$

```
           1087446
            10447
          7612122
         4349784
        4349784
      1087446
      11360548362
      100000
```

Cioè in fine di anni 70 $\frac{3}{4}$ diviene il cap.le

113605.48362 .

Nota. Si deve mancare di un' unità l'ultima decimale di 104.47 essendo ~~troppo~~ alla stessa abbond.te

Problema II

Dato il capitale c, l'annuo frutto b per 100, si cerca in quanti anni diverrà d, atteso la ragione del frutto, e frutto di frutto.

Posto 100 = a, s'intenda

$$\text{I.} \quad a : b :: c : \frac{bc}{a}$$

$$\text{II.} \quad a : b :: \frac{bc}{a} : \frac{b^2 c}{a^2}$$

$$\text{III.} \quad a : b :: \frac{b^2 c}{a^2} : \frac{b^3 c}{a^3}$$

Ora se il cercato n° degl'anni si dica x in fine del tempo x, diverrà $\frac{b^x c}{a^x}$

Dunque $\frac{b^x c}{a^x} = d$

[illegible] equazione si trasforma in [illegible]

$$L\,b \times x + L\,c - L\,a \times x = L\,d$$

[illegible] dividendo dall'una e dall'altra parte pei coefficienti di x, risulta

$$x = \frac{L\,d - L\,c}{L\,b - L\,a}$$

Applichiamo adesso questa [illegible] ad un problema particolare: Dato un capitale 10840 [illegible] ca in quanto tempo [illegible] che in tutto avrà un aumento 49650, [illegible]

rà 60490.

Posto 60490 = d, 10840 = c, 100 = a, 106 = b (imperocchè 100 in fine del primo anno diviene 106) il tempo cercato = x si avrà

$$x = \frac{L60490 - L10840}{L106 - L100}$$

Ora applicati a tali numeri i corrispondenti logaritmi si avrà

$$x = \frac{L\,4.7816836 - L\,4.0350293}{L\,2.0253059 - L\,2.0000000}$$

Fatta la conveniente sottrazione risulta

$$x = \frac{.7466543}{253059} = 29\,\frac{127832}{253059}$$

e in tanto tempo il capitale 10840 al 6 per 100 all'anno con i suoi frutti, e frutti di frutti avrà un aumento di 49650.

Secondo metodo

Con altro metodo più spedito, ma più difficile forse, si può, dato il capitale, la ragione del frutto, e l'aumento col frutto sopra il capitale determinare il tempo come segue

Sia il capitale = c la ragione del frutto 1 : r, si cerca il tempo x, in cui diverrà ne

Poi

Poichè ciascun il capitale c, come $1:r$ diverrà in fine del primo anno $= rc$ (il che dà l'analogia $1:r::c:x$).

In fine del 2do $= r^2c$ (4to proporzionale dopo $1:r::rc:x$)

In fine del 3zo $= r^3c$ Dunque nell'anno x, si avrà r^xc.

Ma deve uguagliare mc, nell'ipotesi dunque sarà $r^xc = mc$, e dividendo per c, risulta $r^x = m$, e applicati logaritmi ~~$L\ x = L$~~ $Lr \times x = Lm$

E dividendo per Lr coefficiente dell'incognita si trova $x = \frac{Lm}{Lr}$.

Applichiamo questa formula alla risoluzione della questione precedente ove prima è da osservare che nell'espressione mc la quantità m si moltiplica nel dato capitale $c = 10840$ e poichè (nel caso nostro) $mc = 60490$ cioè $10840m = 60490$ dividendo per 10840, si trova $m = \frac{60490}{10840} = \frac{6049}{1084}$. Inoltre $r = \frac{106}{100}$; imperocchè la ragione $1:r = \frac{1}{1} : \frac{106}{100}$, ovvero $1:r : 100:106$

$$\text{Dunque} \quad x = \frac{L\,6049 - L\,1084}{L\,106 - L\,100}$$

sostituiti i rispettivi logaritmi in vece di questi numeri, si troverà la medesima conclusione, che nella precedente.

Scolio

Quando in simili problemi si cerca il tempo in cui il dato capitale col dato prò diverrà doppio,

tri-

triplo ecc. la prima formula $\frac{b^x c}{a^x} = d$ si trasforma in questa $\frac{b^x c}{a^x} = 2c$ trattandosi del doppio in $\frac{b^x c}{a^x} = 3c$ pel triplo ecc., e dividendo per c si ha nel primo caso $\frac{b^x}{a^x} = 2$ nell'altro $\frac{b^x}{a^x} = 3$, e applicati i log nel caso primo diviene $x = \frac{L2}{Lb - La}$, nel resto $x = \frac{L3}{Lb - La}$. La seconda formula $r^x = m$, diviene per il doppio $r^x = 2$, pel triplo $r^x = 3$ ecc. e applicati i logaritmi si ha, nel primo caso $x = \frac{L2}{Lr}$, nell'altro $x = \frac{L3}{Lr}$. Così se la ragione del frutto è come 100 a 106, per il doppio sarà il tempo $x = \frac{L2}{L106 - L100}$, pel triplo $x = \frac{L3}{L106 - L100}$ ecc. d'onde si vede che i tempi sono come i logaritmi degli esponenti. E ciò comune a ciascun capitale e basta che sia data la ragione del frutto. Così il proposto Capitale 10840, si raddoppierà ecc. nel tempo medesimo che qualunque altro capitale, posto però il frutto nella medesima ragione, come è manifesto dalle cose precedenti.

Simili problemi, come i seguenti appartengono all'Analisi sublime, tuttavia, poichè sono dei primi ovvj, e facilmente si risolvono coll'uso de'logaritmi, soglio no gli Algebristi proporli in fine dell'Algebra elementare, anzi diconsi i prodotti all'uso de'logaritmi

Prob.

Problema 111.

Dato il capitale e il frutto, coi frutto di frutto di un dato tempo; trovare la ragione dell'aumento e del frutto

Sia il Capitale $= a$, il tempo n il capitale cogli interessi di questo tempo c e la ragione dell'aumento cercata $m : x$

Risoluzione.

Avremo il capitale in fine dell'anno primo $= \frac{ax}{m}$ perchè dopo li [illegible] $m : x :: a$

[illegible] $\frac{ax^2}{m^2}$ perchè dopo $m : x :: \frac{ax}{m}$

In fine del 3.° $= \frac{ax^3}{m^3}$.

Cosicchè in fine degli anni n diverrà $\frac{ax^n}{m^n}$

Ma per ipotesi in questo tempo deve uguagliare c

Dunque $\frac{ax^n}{m^n} = c$. E applicati i logaritmi

$$La + Lx \cdot n - Lm \cdot n = Lc$$

Cioè separando $nLx = Lc + Lm \cdot n - La$

E dividendo $Lx = \frac{Lc + Lm \cdot n - La}{n}$

[illegible] applichiamo ora questa formula universale alla seguente questione

[illegible] il capitale 1000 [illegible] frutto col frutto [illegible] 4.19.1 il tempo 4. si cerca quanto fu il censo annuo di 100 cioè la ragione dell'aumento e [illegible] frutto.

[illegible]

fatto 1000 = a il tempo di anni 4 = x il capitale insieme col pro 1464.1 = c, 100 = m, sarà la ragione cercata m · x cioè 100 . x di cui bisogna trovare il conseguente x

Sostituiti i numeri nella seconda formula avremo

$$L x = \frac{L\,1464.1 + L\,100 \cdot 4 - L\,1000}{4}$$

Ora applicati a tali numeri i corrispondenti logaritmi si avrà,

$$L x = \frac{L\,3.1655707 + L\,2.0000000 \cdot 4 - L\,3.0000000}{4}$$

Quindi fatte le dovute operazioni risulta

$$L x = \frac{L\,8.1655707}{4} = L\,2.0413927$$ a cui corrisponde il numero 110 e la ragione dei frutti è come 100 a 110, ossia come 10 a 11

Secondo Metodo.

Sia a il capitale, il tempo = n, il frutto di [illegible] [illegible] b, $a + b = ma$, e la ragione dell'aumento cercata $1 : x$

Soluzione

Sarà il capitale in fine del primo anno $= ax$, essendo $1 : x :: a : ax$

in fine del secondo $= ax^2$, perchè $1 : x :: ax : ax^2$

in fine del 3zo ax^3. laonde in fine degli anni $n = ax^n$, ma deve divenire uguale ad $a + b$ ossia $= ma$

dunque $ax^n = ma$, e dividendo $x^n = m$.

Ogni

Applicati i logaritmi, $n L x = L m$

e divid.^{o} $L x = \frac{L m}{n}$

Applicata questa formula alla risoluzione della questione precedente, sarà

$$L x = \frac{L 14641 - L 10000}{4}$$

Poichè il valore di $m = \frac{14641}{10000}$.

sostituiti i corrispondenti logaritmi risulta:

$$L x = \frac{L 4.1655707 - L 4.0000000}{4}$$

a cui corrispondono i numeri 11, e 10, e tramutata la ragione aritmetica in ragione geometrica $\frac{11}{10} = x$. Cresce dunque il capitale nella ragione di 10 : 11, che è la ragione dell'aumento.

Problema IV.

Dato il tempo di anni 4, il frutto col frutto di frutto di questo tempo L. 1240 coi suoi annui di 5 per 100, cioè la ragione del frutto, e dell'aumento come 100 a 105, ovvero 20 a 21. Si cerca il capitale.

Posto il capitale cercato = x, la ragione 20 : 21 = 1 : r, il tempo 4 = n, il frutto 1240 = c. Si avrà

Capitale del primo anno $1 : r :: x : rx$

Capitale del 2.do $1 : r :: rx : r^2x$

Capitale del 3.zo $1 : r :: r^2x : r^3x$

Sicchè in fine degli anni n, diverrà il capitale così aumentato $r^n x$ da cui tolto il capitale x, si avrà l'equa

zione

zione:

$$r^n x - x = c$$

e dividendo $x = \frac{c}{r^n - 1}$

Nel caso nostro $x = \frac{1240}{\frac{21}{20}^4 - 1}$

Elevata alla 4ta potenza $\frac{21}{20}$ col mezzo de' logaritmi, 1.3222193 × 4, e 1.3010300 × 4 = 5.2888772, e 5.2041200, a cui corrispondono i numeri 194481, 100000, onde si ha la ragione $\frac{194481}{100000}$. da cui sottratta l'unità resta $\frac{94481}{100000}$, per cui dividendo il frutto, e frutto di frutto risulta 5742 $\frac{10098}{34481}$ capit. cercato.

I quattro precedenti problemi si dicono di censo doppio, ovvero composto. I problemi di sconto doppio si risolvono nella ragione contraria al censo. Ecco un esempio

Si cerca qual sia il capitale, il quale investito per anni 100 a ragione del 6 per 100 all'anno non ... a scudi 100000 attesa la ragione del suo ... to di frutto

... la ragione come $a : b$ $100000 = c$, $100 = n$ capitale cercato $= x$, sarà

In fine del primo anno $b : a :: c : ac$

In fine del 2do $b : a :: \frac{ac}{b} : \frac{a^2c}{b^2}$

In fine del 3zo $b : a :: \frac{a^2c}{b^2} : \frac{a^3c}{b^3}$ Sicchè

Sicchè in fine degli anni n diverrà $\frac{a^n c}{b^n}$

Ma perchè in fine di detto tempo deve uguagliare x, sarà l'equazione:

$$\frac{a^n c}{b^n} = x$$

E applicati i logaritmi risulta:

$$Lx = La \times n + Lc - Lb \times n$$

Sostituiti i corrispondenti numeri diviene.

$$Lx = L\,100 \times 100 + L\,100000 - L\,106 \times 100$$

Applicati i corrispondenti logaritmi ai numeri sopra espressi si ha:

$$Lx = L\,2.0000000 \times 100 + L\,5.0000000 - L\,2.0253059 \times 100.$$

Fatte le dovute operazioni risulta.

$$x = 294\,\frac{10627}{14747}$$

Altro Esempio

Pietro in capo a certo tempo deve pagare a Paolo D.ti 800 ma per avere l'avvantaggio dello sconto in ragione del 10 per 100 all'anno pagò subito per saldo D.ti 601.518 si cerca per quanto tempo abbia goduto l'avvantaggio del detto sconto, in ragione del frutto, e frutto di frutto

Sia x il tempo cercato la data ragione 100:110 = a:b, 800 = c; 601.518 = d, sarà

[illegible]

2.do $b : a :: c : \frac{ac}{b}$

3.zo $b : a :: \frac{ac}{b} : \frac{a^2c}{b^2}$

4.to $b : a :: \frac{a^2c}{b^2} : \frac{a^3c}{b^3}$

Sicchè in fine degli anni x diverrà $\frac{a^x c}{b^x}$

Ma perchè in fine di detto tempo deve agguagliare d, sarà l'equazione

$$\frac{a^x c}{b^x} = d$$

E applicati i logaritmi.

$$La \times x + Lc - Lb \times x = Ld$$

Scambiati i segni $-La \times x - Lc + Lb \times x = -Ld$

Riducendo $Lb \times x - La \times x = Lc - Ld$

E dividendo $\quad Lx = \frac{Lc - Ld}{Lb - La}$

Sostituiti i numeri $Lx = \frac{L\,800 - L\,601{\cdot}515}{L\,110 - L\,100}$

E applicati i logaritmi

$$Lx = \frac{L\,2{\cdot}9030900 - L\,2{\cdot}7792485}{L\,2{\cdot}0413927 - L\,2{\cdot}0000000}$$

Fatte le dovute operazioni risulta: $x = 2{\cdot}99$

Nota

Si può ancora risolvere la presente giusto la formula della Quest. 11. aumentando di nuovo ...

5'18

$5^{\prime}18$ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] 800 [illegible] si porrebbe uguale a d.

Altri [illegible] [illegible] [illegible]
col mezzo de' logaritmi
Problema 1.

Dato un vaso pieno d'acqua capace di libre 150 ovvero semioncie 4800 da cui si estraggano semioncie $5\frac{3}{25}$, e invece vi sostituiscano semioncie $5\frac{3}{25}$ di vino puro. Nel seguente giorno da questo misto ricavino di nuovo semioncie $5\frac{3}{25}$, e si sostituiscano semioncie $5\frac{3}{25}$ di vino puro, e così di mano in mano ogni giorno per un anno intiero; si cerca quanto vino, e quanta acqua si avrà in capo ad un anno?

Da semioncie 4800 detratte semioncie $5\frac{3}{25}$ di acqua, e di nuovo supposta un'eguale quantità di vino puro resterà il vaso [illegible] [illegible] $4794\frac{22}{25}$ con semioncie $5\frac{3}{25}$. [illegible] [illegible] nel [illegible] giorno, che questo misto di nuovo si tolgano semioncie $5\frac{3}{25}$ e altrettanto vino [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] semioncie $5\frac{3}{25}$ non [illegible] di sola acqua, ma contenevano altrettanto vino il quale sarà all'acqua nella stessa proporzione, che $5\frac{3}{25}$ a $4794\frac{22}{25}$, cioè la quantità delle semioncie dell'acqua residua dopo la seconda estrazione [illegible] [illegible] [illegible] dopo 4800, $4794\frac{22}{25}$, cioè si avrà $\div$ 4800 $\frac{119872}{25}$ $\frac{2242805}{46875}\frac{12}{}$, il che è [illegible] [illegible] [illegible] giorno [illegible] estratte dal misto semioncie $5\frac{3}{25}$ [illegible] [illegible] [illegible] quantità delle semioncie di acqua residua è il 4° [illegible] [illegible] dopo [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

Dun

Dunque compito l'anno, cioè dopo la 365 esima estrazione, si avranno le samionica dell'acqua [illegible] 365 [illegible]

nella ragione di 4800 a $4794 \frac{2 \cdot 2}{25}$ [illegible] cui primo termine è 4800, cioè innalzando l'esponente della serie alla potenza 365: per cui diviso il suo primo 4800 [illegible] termine [illegible] si [illegible] un calcolo laboriosissimo per più modi ma applicati [illegible], [illegible] si risolve il problema e si trova che in capo all'anno resteranno nel vaso samionica 3251 $\frac{1}{5}$ di acqua e però samioncia 1548 $\frac{4}{5}$ di vino.

Sbaglia l'autore nella sua regola; Bisogna dividere il primo 4800 per l'esponente $\frac{120000}{119872}$, ovvero $\frac{7500}{7492}$ [illegible] al grado 365 come qui si è detto.

Ora essendo 0.0004635 il log. di $\frac{7500}{7492}$, elevato [illegible] 0.1691775 [illegible] sottratto da 3.681 2412 log. 4800, resta 3.5120637 a cui corrisponde nella tavola il n° 3251 e $\frac{1}{5}$ circa samioncia dell'acqua

[illegible] II

[illegible] una botte capace di 10 Conzi di vino si deve sem[illegible] un [illegible] ogni giorno un boccale di vino per [illegible]. Ma l'amministratore estraendo una delle dette misure, ha infuso ogni giorno un [illegible] di acqua. Si cerca [illegible] quanto vino e quanta acqua [illegible]

Conzi 10 [illegible] 640, e [illegible]

[illegible]

in giornate no mercantili sono giorni 90
Ecco dunque la serie ∵ 640, 639 ....
e ne l'esponente della ragione $\frac{640}{639}$
formula seguente $a : b^{m-1}$ cioè

$$L a - L b \times m - 1$$

ragionando $640 = a$, $\frac{640}{639} = b$; ~~90~~ $90 - 1 = m - 1$;
sarà ... $L\,640 - L\,640 \times 89 - L\,639 \times 89$
$L\,2.8061800 - L\,2.8061800 \times 89 \cdot L\,2.8055009 \times 89$
cioè $L\,2.8061800 - L\,249.7500200 \cdot L\,249.6895801$
riducendo $L\,2.8061800 - L\,0.0604409$

Eguale a $L\,2.7457391$ a cui corrisponde il numero $556\,\frac{6043}{7804}$, e tanto vino resta nella Botte passati i tre mesi. Acqua entrata Boccali $83\,\frac{1161}{7804}$ -

[illegible] la più [illegible] della [illegible] così [illegible] in una le quali si ha sempre una serie Geometrica decrescente [illegible]

Annotazione

[illegible] qualche problema [illegible] un logaritmo minore del logaritmo di 1000 [illegible] il numero [illegible] che si cerca, bisogna prendere [illegible] del detto logaritmo e del logaritmo di qualche altro numero, in modo però che questa somma sia maggiore [illegible] di 1000. [illegible] 10000. [illegible] aggiunto [illegible] il numero corrispondente [illegible] [illegible] sarà [illegible] il numero che si cerca [illegible]

[illegible]

Algebra Jerrigia ·XI

della costruzione dei logaritmi; ove si può osservare che la differenza dei logaritmi tra 1000, e 0000 [illegible] mero, inesattamente che nel [illegible]

Quindi pure dipende l'inesattezza che notammo rimasta al precedente ultimamente risolto, cioè [illegible] capace di 10 Boccali di vino, si cava altrettanto per 4 giorni un [illegible] di vino, e infondendo ogni giorno altrettanto di acqua quanto vino sarà nell'ultimo termine? Risolvendolo senza i logaritmi si trovò vino Boccali 6.561 applicati i logaritmi questo la formola si avrà il numero che corrisponde al logaritmo 0.8159700, il quale non ritrovo esatto per aver egli una caratteristica minore del log. di 1000, gli aggiungo dunque per l'annotazione precedente il log. di 1000 [illegible] numero 1000000 log di 1000, sarà la somma 3.81 59700 trovo il numero corrispondente il quale è 6561 e divido per 1000, e risulta 6.561 pel numero cercato del tutto eguale al precedente determinato senza i logaritmi.

Ciò avvertito, passiamo alla risoluzione di altri problemi in cui sarà frequente l'uso della suddetta annotazione.

Problema I.

Siano 100000 abitanti in una [illegible] in cui la popolazione si aumenti ogni anno di $\frac{1}{30}$, si cerca qual sarà il numero degli abitanti alla fine di un secolo, cioè dopo 100 anni?

Dato

Dato annuo accrescimento $\frac{1}{30}$ è chiaro come la ragione della serie [illegible] ciò a quella si paragoni come abbiamo $1 : 1 + \frac{1}{30}$, ovvero $1 : \frac{31}{30}$ cioè $30 : 31$ [illegible] ogni anno, come $30 : 31$

[illegible] ragione [illegible] cioè $\frac{31}{30}$, e dato il primo 100000 [illegible] termine della [illegible] della serie [illegible]

[illegible] termine $100000 = a$, l'esponente $\frac{31}{30} = b$, $100 = m-1$ avremo la formula $a \cdot b^{m-1} = x$, [illegible] $100000 \times \left(\frac{31}{30}\right)^{100} = x$ (poichè la serie [illegible] consta di 101 termini), e [illegible] $L\,100000 + 100 \times L\,\frac{31}{30} = L\,x$, ed essendo log di $100000 = 5.0000000$ log di $100 = 2.0000000$ e log di $\frac{31}{30} = 1.4913617 - 1.4771213 = 0.0142404$, dunque $100 \times L\,\frac{31}{30} = 100 \times 0.0142404 = 1.4240400$, e però $L\,x = 6.4240400$, ed $x = 2654852$ [illegible] in capo a 100 anni 2654852 abitanti in questa Provincia.

Nota trascurando il log 0.0142404 moltiplicato in 100 per due note [illegible] nella [illegible] [illegible] [illegible] di [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible]
[illegible] tre figli di [illegible] e dalla [illegible] tre moglie; si [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] a 200 anni

[illegible]
$1 : \frac{1+x}{x}$, cioè $x : 1+x$; [illegible] l'esponente della [illegible]
[illegible] $\frac{1+x}{x}$; dunque l'equazione $6 \times \left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} = 1000000$
[illegible]
[illegible], ovvero posto $6 = a$ $200 = m-1$ $1000000 = b$ [illegible]
$a \cdot \left(\frac{1+x}{x}\right)^{m-1} = b$

Dividendo per a, coeff.^{te} dell'esponente incognito [illegible]
$\left(\frac{1+x}{x}\right)^{m-1} = \frac{b}{a}$, ed estraendo da una parte e dall'altra la radice $m-1$ nel caso nostro la radica ducentesima
[illegible] $\frac{1+x}{x} = \sqrt[m-1]{\frac{b}{a}}$; ovvero $\frac{1+x}{x} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m-1}}$ cioè $\frac{1+x}{x} =$
$= \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}$; e applicati i log. $L\,\frac{1+x}{x} = \frac{1}{200} \cdot L\,\frac{1000000}{6}$
$= \frac{1}{200} \times 5.2218487$ [illegible] 0.0261092

Bisogna trovare il n.° corrispond.^{te} ma siccome la caratteristica di 0.0261092 è minore del log. di 1000, se gli aggiunga [illegible] conseguenta [illegible] il log. di qualche [illegible] [illegible] 1000 [illegible] 0.0261092 a cui corrisponde [illegible] n.° 1031 [illegible] 1001902 [illegible] 1000 [illegible] 1.001902 [illegible] $\frac{1001902}{000000}$ [illegible] $\frac{1+x}{x}$ [illegible] come 1000000 a 1001902

[illegible]

Se dividasi poi 1061962 per 1000000, il residuo sarà l'annuo accrescimento cioè $\frac{061962}{1000000}$ sarà l'aumento annuo prossimamente uguale a $\frac{1}{16}$ cioè a $\frac{1}{x}$

[illegible] III

Si cerca la quantità per cui dovrebbe crescere ogni anno un [illegible] [illegible] per diventare alla fine di ciascun secolo più numeroso del doppio.

Sia $\underline{a}$ il numeratore degli individui, $\frac{1}{x}$ la quantità che si cerca, $100 = m - 1$ [illegible] anno [illegible] fine di ciascun secolo $a \times \left(\frac{1+x}{x}\right)^{m-1} = 2a$, per la ragione che abbiamo veduto. Dividendo dunque per a risulta $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{m-1} = 2$; ed estratta la radice $\frac{1+x}{x} = \sqrt[m-1]{2}$, ovvero $= 2^{\frac{1}{100}}$

Applicati i logaritmi si ha $L\frac{1+x}{x} = \frac{1}{100} \times L\,2 =$ $\frac{1}{100} \times 0.3010300 = 0.0030103$. Poichè questo logaritmo è minore del logaritmo di 1000, aggiungasi il logaritmo di qualche [illegible] numero maggiore di 10000 ch'è 4.0000000, si avrà il log 4.0030103 a cui corrisponde il n.° $10069\frac{5}{9}$ il quale diviso [illegible] 10000 numero che [illegible] aggiunto, si ha $\frac{90626}{90000}$. Questo è esponente uguale a $\frac{1+x}{x}$. Se dividasi il numeratore pel denominatore la frazione residua $\frac{626}{90000}$ sarà l'aumento annuo, che si riduce a $\frac{1}{144} = \frac{1}{x}$, riflettendo: siccome 626 ad 1 così 90000 al 4.to termine 144. trascurata la frazione [illegible]. Si conchiude dunque che qualunque popolazione [illegible] [illegible] $\underline{a}$ dovrà per ogni epoca secolare aumentarsi di $\frac{1}{144}$ [illegible] [illegible] per divenire [illegible] [illegible]

Problema IV.

[illegible] [illegible] che una popolazione si aumenti ogni anno della

cen-

centesima parte. Quanti anni si ricercheranno, perchè questo numero divenga [illegible]?

Essendo $\frac{1}{100}$ annuo accrescimento sarà [illegible] della serie $\frac{101}{100}$, di cui il primo già è la proporzione mancante. Chiamiamo a il numero degli anni, cioè de' termini della serie x, perchè poi dee divenir decuplo, l'ultimo già sarà 10a; laonde per probl. 4° della serie geometrica si avrà l'equazione $a \cdot \left(\frac{101}{100}\right)^x = 10a$. dividendo per a, diviene $\left(\frac{101}{100}\right)^x = 10$.

Applicati i log. $L\,\frac{101}{100} \times x = L\,10$ e [illegible] pel coefficiente $L\,\frac{101}{100}$, diviene $x = L\,10 : L\,\frac{101}{100}$; ma $L\,\frac{101}{100} = L\,101 - L\,100$, sarà $x = \frac{L\,10}{L\,101 - L\,100} = \frac{10000000}{43214} = 231$. Il numero dunque degli individui [illegible] in ciascun [illegible] di 231 anni.

Problema V.

[illegible] custodia [illegible] 211 [illegible] in custodia per anni 5, con [illegible] de' [illegible] terreno. Accadde che l'autore la custodì per anni 7. e mesi 9. e ritornò sono in tutto [illegible] 840 domandasi quanto ne ritornò [illegible] a ciascuno

Sia il presente probl. il quale viene proposto ne' [illegible] termini da Pietro-Girolamo Cortinovis ed altri autori da [illegible] citati (veggasi la Proposta 7. alla pagina 284 del Compendio dell'Abbaco, ovvero Pratica generale di [illegible] di Girolamo-Pietro Cortinovis impressa in Venezia l'anno 1782.) potesse essere risolto con altro metodo, come io mi [illegible] di fare, una tal ragione [illegible] di somma [illegible]

[illegible] il caso [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
nella [illegible] [illegible] [illegible] et.

Io porterò prima le risoluzioni de' citati Autori, le quali sono [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

Risoluzione del P. Fabio Conti

„ [illegible] si [illegible] nel presente quesito [illegible] [illegible]
„ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] gli anni 5. accordati, [illegible]
„ il Pastore senza patto doveva avere la metà del capitale e [illegible]
„ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] in pecore 840, [illegible] [illegible]
„ [illegible] 420, e le altre 420 il Gentiluomo. Ma sopra [illegible] il Pa-
„ store [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] altri 5 anni le pecore 420 [illegible]
„ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] metà capita-
„ le, e guadagno, senza il dubbio il Pastore ne avrebbe di
„ quelle 420 la metà, cioè 210. ma perchè non le ha cu-
„ stodite senon anni 2. mesi 9. dunque ne dovrà avere la
„ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] che così [illegible] averla con la
„ regola [illegible] [illegible]. Se in anni 5 il Pastore guadagna peco-
„ re 210. quante ne guadagnerà in Anni 2. e mesi 9.? Si opere-
„ rà solito della regola, che verranno Pecore $115\frac{1}{2}$ per quelle che
„ deve avere il [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] anni due mesi 9 et
„ più, e queste $115\frac{1}{2}$ si uniranno con le altre 420. che ebbe per
„ gli anni 5, che faranno $535\frac{1}{2}$, e questa sarà la parte che
„ tocca al Pastore e al Gentiluomo [illegible] [illegible] [illegible]
„ 840, che saranno pecore $304\frac{1}{2}$. La prova si fa col somma-
„ re le [illegible] [illegible], cioè le pecore $535\frac{1}{2}$, che toccano al Pa-
„ store, e le pecore $304\frac{1}{2}$, che toccano al Gentiluomo e si
„ vedranno venire in punto le pecore 840, che già furono ri-

ho;

[illegible] dopo gli anni 7 e mesi 9 in questo [illegible]
„rà in altri simili che non si potrà far errore."

Che questa soluzione sia [illegible] [illegible]
[illegible] 840 [illegible] anni 7 mesi 9 [illegible]
[illegible]

[illegible] 840 [illegible]
quantità anco arbitrariamente presa sì per la parte del [illegible] sì per la [illegible] [illegible] 840. [illegible] si è evidente che tutto è falso.

Come la Risoluzione di Girolamo Pietro Centinovis, e insieme del Padre Alessandro su[p]citato.

„Secondo la mia opinione uniforme sempre a quella [illegible] Alessandro citato nella soluzione [illegible] V [illegible]
[illegible] anni 7. e mesi 9 [illegible]
[illegible] 1 anno [illegible] 9 [illegible]

» [illegible] dee [illegible] a [illegible] [illegible] a [illegible]
» [illegible] a [illegible] d' anni 2 e [illegible];
» e q. [illegible] per deve egli avere a ragguaglio della prima, la
» sua porzione relativa al tempo e in oltre la metà de'
» [illegible] per ricavare la quantità de' frutti
» [illegible] d' anni 8 [illegible] necessaria, [illegible]
» na dalla seg.te regola del tre: Se in anni 7 e [illegible] 9 [illegible]
» le pecore hanno prodotto di frutto 624. che avranno pro
» dotto in anni 5.? [illegible] operato ne [illegible] pecore 402
» $\frac{18}{31}$ di frutto. Da ciò rilevasi, che il Pastore al termine del
» la prima Soccida deve avere la metà del capitale del
» le pecore 216, che è di pecore 108. e la metà de' [illegible]
» vati frutti 402 $\frac{18}{31}$, che è di pecore 201 $\frac{9}{31}$ che sono in [illegible]
» to pecore 309 $\frac{9}{31}$.

» Diviso dunque tra il Padrone ed il Pastore il prodotto
» di pecore 402 $\frac{18}{31}$ della prima custodia, ovvero soccida
» di anni 5. adesso si trova il frutto spettante a' susseguen
» ti anni 2. e mesi 9. di custodia. e ciò col [illegible] dalle
» pecore 624 date nella proposta le anzidette pecore 402
» $\frac{18}{31}$ e [illegible] pecore 221 $\frac{13}{31}$, delle quali spetta la
» metà al Padrone, e l'altra metà al Pastore; per la ragio:
» ne che se il Padrone vi pone il capitale, il custode lo alimen
» ta, e [illegible] la sua fatica e [illegible] 110 $\frac{22}{31}$ [illegible]
» [illegible] ed altrettanto al secondo. Quanto poi [illegible]
» della [illegible] soccida, ch' è di pecore 309 $\frac{9}{31}$ rilasciato dal
» Padrone per rilevare la [illegible] spettante al Pastore, [illegible]
» così con la regola del tre: Se per anni 8. di custodia,
» [illegible]

„ gli frutterebbero al custode pecore 134 $\frac{20}{31}$, componenti la me-
„ tà del mentovato capitale; che gli frutterà in anni 2, e me-
„ si 9.° Dalla operazione di questa regola, ne sortiranno peco-
„ re 85 $\frac{17}{310}$ di capitale e le restanti pecore 224 $\frac{73}{310}$ sono dovu-
„ te al Padrone. Dal fin qui detto ne ricavasi, che il Pastore
„ deve avere per sua prima custodia di anni 5. pecore 309 $\frac{9}{31}$,
„ e per la sola di anni 2. e mesi 9. pecore 110 $\frac{22}{31}$ di frutto, e
„ pecore 85 $\frac{17}{310}$ di capitale, che ammontano in tutto pecore 505
„ $\frac{17}{310}$, ed il Padrone per suo capitale deve avere pecore 224 $\frac{73}{310}$.
„ e di frutti pecore 110 $\frac{22}{31}$; che in somma fa la summa di
„ pecore 334 $\frac{293}{310}$, le quali due summe, cioè pecore 505
„ $\frac{17}{310}$ e pecore 334 $\frac{293}{310}$, producono unitamente, la data
„ pecora 840."

Se la quantità delle pecore 402 $\frac{19}{31}$ dalli suddetti Stu-
dii ritrovata per la regola del tre fosse la vera quantità del-
li prodotti, che si trovavano avere nel termine dell'anno
quinto, tutto il resto dell'operazione colli medesimi dovere
ma ivi sta appunto avviluppato il grande sbaglio di ques-
ta [illegible] di pecore che potevano avere in capo al-
l'anno quinto deve avere prodotto un maggior numero
di frutti nelli susseguenti anni 2. mesi 9. che in tutti li
cinque anni precedenti. Se ogni anno si producesse un
egual quantità di frutti, la regola del Tre sarebbe at-
ta a ritrovare la quantità cercata, ma poichè in ciasc-
cun anno susseguente ne risulta un maggior numero di
frutti, la regola del tre, nel caso nostro scostasi di molto
dalla vera quantità; e ne deriva in conseguenza un grosso
sbaglio

Per

Per ricavarlo basta por mente che la quantità $110\frac{22}{31}$
metà de' frutti toccati al Padrone dalla 2da soccida in
terminata di anni 2. e mesi 9 è assai minore della
quantità $201\frac{9}{31}$ altra metà de' frutti pur toccati al Pa-
drone dalla prima soccida di anni 05. mentre e per ragio
ne del capitale maggiore $309\frac{9}{31}$ ricavato dal Padrone nella
2da soccida e per ragione della più rapida moltiplicazio
ne nelli susseguenti anni 2. e mesi 9 converebbe riuscire
tutto all'opposto. Di grazia formato questo discorso. Se un ca
pitale di animali 210 nelli primi anni 5 in cui la molti-
plicazione è lenta, mi dà un prodotto di animali $201\frac{9}{31}$.
un capitale poi di animali $309\frac{9}{31}$ nelli susseguenti anni 2. e
mesi 9 in cui la moltiplicazione è rapida, qual prodotto
mi darà? Osservando mi darà un prodotto di animali 154
$\frac{35}{93}$ senza calcolare la maggior rapidità di moltiplicazione dell'an
no quinto in poi laddove li sopracitati autori lo hanno
computato a soli animali $110\frac{22}{31}$. Essendo dunque evidente
che li frutti prodotti dal quinto anno in poi, per concon-
chiudere che la loro risoluzione fu falsa. Nè vale la prova
da essi addotta, cioè che la somma delle trovate porzioni
$505\frac{17}{310}$ e $934\frac{293}{310}$ restituisca la prefissa quantità di peco-
ra 440. Imperocchè altro non prova senon a dimostrare
che la risoluzione sarebbe legittima nel supposto che nell'
intervallo di anni 5 si fosse prodotta una real quantità di
pecore $402\frac{18}{31}$. Il che dalle ragioni allegate conviene esclu-
dere

Segue

Segue ora la risoluzione dello stesso problema secondo l'opinione dell'Abbate Monai ~~amico~~ il quale dice, che, per dare una vera risoluzione al presente, e simili problemi, prima di tutto rendesi necessario il trovare l'accrescimento annuo ovvero nel caso nostro (perchè oltre agli anni 7 vi sono anche 9 mesi, riducendo il tutto in mesi 93) l'accrescimento mensuale dei proposti animali 216, nella maniera che segue.

Sia $\frac{1}{y}$ l'accrescimento ~~annuo~~ mensuale nell'intervallo di mesi 93. Dunque $216\left(1+\frac{1}{y}\right)^{93} = 840$; ovvero $\frac{1+y}{y} = \left(\frac{840}{216}\right)^{\frac{1}{93}}$; e però $L\,\frac{1+y}{y} = \frac{1}{93} \times L\,\frac{840}{216} = \frac{1}{93} \times 0.5898250 = \frac{0.5898250}{93} = 0.0063422$; onde $\frac{1+y}{y} = \frac{101471}{100000}$; e però $y = \frac{100000}{1471}$. Dunque $\frac{1}{y} = \frac{1471}{100000}$. Questo è l'accrescimento mensuale.

Ora se il cercato numero d'animali in capo alli anni cinque cioè a sessanta mesi, in cui doveva terminare la compagnia si dica z.

Avremo $216\left(1+\frac{1471}{100000}\right)^{60} = z$, cioè $L\,216 + 60 \times L\,\frac{101471}{100000} = L\,z$; ma $L\,\frac{101471}{100000} = 0.0063418$. Dunque $60 \times L\,\frac{101471}{100000} = 0.3805080$; ma $L\,216 = 2.3344537$; Dunque $L\,z = 2.7149617$; e però $z = 518$, numero cercato.

Si conchiude che il cercato n.° di animali che doveva esservi alla fine dell'anno quinto in cui doveva terminare la compagnia consiste in 518 individui dei qual n.° 518 sono i detti capitali 216, resta 302, il numero dei frutti

pro:

prodotti nel tratto delli primi anni cinque quantità ben diversa da quella, che con la regola di proporzione han ne determinato il Cortinovis ed il Padre Alessandro Rivera i quali li fanno ascendere a $402 \frac{18}{31}$.

Ho detto che la quantità degli animali, che doveva esistere in capo all'anno quinto doveva produrre un maggior numero di frutti nel tratto delli susseguenti anni 2 e mesi 9 che in tutti li 5 anni, ecco il fatto. Se dal total numero dato di animali 840 si tolgan 210, numero de' capitali, resta 624 per l'intero numero dei nascenti, da cui tolto 302 numero dei frutti prodotti nei primi cinque anni, resta 322 per numero dei nascenti prodotti dal quinto anno in poi. Per cui si conosce che la quantità dei prodotti dal quinto anno in poi eccede la quantità dei primi, come ho detto e rimarco come si vede, per una differenza di 20 individui di più.

Or essendo altra divisione il cercato numero degli animali esistenti in capo alli primi cinque anni in cui doveva terminare la compagnia, fu trovato eguale a 518 la di cui metà, cioè 259 spetta al Padrone e 259 al Custode e ciò in rimetto alla prima compagnia di anni 5.

Tolto poi dalla totale quantità di animali 840 il cercato n.° degli animali 518, che doveva esistere in fine dell'anno quinto, resta 322 per la quantità dei frutti della detta compagnia terminata di anni 2 e mesi 9 di più metà di quelli spetta al Padrone, e l'altra metà

ti al Pastore, per la ragione che se il Padrone vi mette il ca-
pitale il Pastore lo alimenta, e li contribuisce con la sua
fatica a mesi 101 per avervi acquisito altrettanti al 28.

Quindi, se al capitale di animali 259 mancato col condo-
ne nella sud. compagnia di anni 2 e mesi 9 di custodia
di mesi, non può il Pastore pretendere se non la por-
zione della metà del capitale spettante a tal tempo cor-
risposto; ed avendo con la regola di proporzione si faccia
come anni 5 ad anni $2\frac{3}{4}$ così $129\frac{1}{2}$ metà del ca-
pitale, alla cercata porzione del Pastore, la quale, ve-
nendo animali di tal regola, risulterà uguale a $71\frac{9}{40}$
Il restante del capitale cioè animali $187\frac{31}{40}$ appartengo-
no al Padrone

Dal fin qui detto si deduce, che il Padrone, per parte
del capitale deve avere animali $187\frac{31}{40}$, e di frutti an-
nuali 161 che quindi insieme, e avremo, cioè ~~[illegible]~~
$348\frac{31}{40}$ per tutta la sua porzione

Raccolte poi in una somma tutte le parti 259; 161, $71\frac{9}{40}$,
si avremo cioè $491\frac{9}{40}$, per tutta la porzione del Pasto-
re. La qual somma $348\frac{31}{40}$, e $491\frac{9}{40}$ raccolte insieme
formano appunto 840 totale montante di in... il che
è ... a 8

Delle Serie de' Numeri Figurati

Capo V.

Se abbiasi una serie di unità, le quali ordinatamente si aggiungano; indi le loro somme si aggiungano di nuovo col medesimo ordine, e così di seguito le nuove somme, si avrà un aggregato di numeri, che figurati si appellano, come nella seguente Tavola.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
Unità generatrici	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	0	0	0	0	0	0
	1	2	1	0	0	0	0	0
	1	3	3	1	0	0	0	0
	1	4	6	4	1	0	0	0
	1	5	10	10	5	1	0	0
	1	6	15	20	15	6	1	0
	1	7	21	35	35	21	7	1

La prima serie è di unità, la seconda di numeri naturali, la terza di triangolari, la 4ta di piramidali, quindi di triangulo-piramidali, in appresso di piramido-piramidali ecc.

In tali numeri si contengono infinite proprietà, le quali costituiscono la parte più nobile dell'Aritmetica Universale. Noi ne noteremo tra queste tali, dalle quali tutte le altre dipendono.

1. E in prima ciò devesi osservare, che in qualunque di tali serie tanti zeri si trovano, quante sono le serie precedenti. Così nella 2da serie vi è un zero, nella terza due, nella 4ta tre ecc.

2. Qualunque numero di qualsivoglia serie si uguaglia al la somma di tutt' i numeri nella serie immed.te superiori. Così nella serie terza il numero triangolare 10. eguaglia la somma di tutti li naturali sopra se stesso posti. E nella serie 4ta il numero piramidale 35. eguagliasi alla somma di tutti i triangolari sopra di se descritti. E nella sesta il numero piramido piramidale 21. eguagliasi alla somma di tutti i triangolo piramidali sopra posti

3. In qualsivoglia serie la somma di tutti li termini significanti ha quella ragione a qualunque termine ultimo de' medesimi moltiplicato per tutto il numero de' termini (compresi anco li zeri), che ha l'unità all'esponente della stessa serie. Così nella prima serie la somma di cinque termini al termine ultimo moltiplicato per 5 è come 1:1. Nella 2da è come 1:2. Nella terza come 1:3, e così procedendo.(b)

Nota. Per termine ultimo s'intende qualunque termine. Così nella 2da serie la somma di cinque termini al termine ultimo 4. moltiplicato per 5. è come 1:2.

Dalli quali proprietà ne risulta il metodo, onde determinare le somme di quanti si voglia termini in qualunque di sì fatte serie, come ora spiegheremo.

(b) Si veda la dimostrazione di tale proprietà nell'arte del congetturare P. 2. C. 3.

Sia in primo da determinarsi la somma de' numeri naturali, il cui numero sia n (incominciando dall'unità). E perchè l'ultimo termine di questa serie (per la 2.da proprietà) è $= n$, ed il numero de' termini, se si incomincia dal zero è $n+1$, sarà (per la terza proprietà) la somma di tutti al prodotto del numero n per $n+1$, come $1:2$. Se dunque la somma di tutti si dica S.

Sarà $$S = \frac{n\cdot\overline{n+1}}{1\cdot 2} = \frac{nn+n}{2}.$$

Sia in secondo luogo da determinarsi la somma de' numeri triangolari. E poichè l'ultimo termine uguaglia tutti i numeri sopraposti della serie preced.te, se il numero de' triangolari da aggiugnersi si dica n; sarà l'ultimo $= \frac{n\cdot\overline{n+1}}{1\cdot 2}$. Ma il numero de' termini (cominciando da zero) in questa serie è $n+2$. Essendo dunque (per la terza proprietà) la somma di tutti al prodotto dell'ultimo moltiplicato nel numero de' termini, come $1:3$, sarà $$S = \frac{n\cdot\overline{n+1}\cdot\overline{n+2}}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}.$$

Coll'istesso metodo per i piramidali sarà
$$S = \frac{n\cdot\overline{n+1}\cdot\overline{n+2}\cdot\overline{n+3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}$$

E per qualsivoglia serie, il cui esponente si dica c in infinito, sarà
$$S = \frac{n\cdot\overline{n+1}\cdot\overline{n+2}\cdot\overline{n+3}\cdots\cdots\overline{n+c-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots c}.$$

Col qual canone intanto si avranno le somme di quanti e qualunque numeri figurati.

Sia per esempio da determinarsi la somma di sei triangolari e perchè in questa ipotesi abbiamo $n=6$, e $1=3$

Sarà $S = \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

Cioè $S = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{336}{6} = 56.$

Se si cerchi la somma di dieci piramidali, allora sarà $n=10$, ed $1=4$

Dunque $S = \frac{n \cdot n+1 \cdot n+2 \cdot n+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

$= \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{17160}{24} = 715.$

Scolio.

Se il numero n incominci dai zeri, tante unità dovranno da quello sottrarsi, quanti sono i zeri, che nella serie si ritrovano. Così se siano sei i termini incominciando dall'unità, diverranno cinque (se incominci dal zero nella seconda serie) e quattro nella terza, e cinque nella 4ta. Computando dunque i termini dai zeri, il numero n rimane lo stesso nella prima serie, ma nella seconda, terza, 4ta ecc. diviene $n-1$, $n-2$, $n-3$ ecc.; e sarà il Canone $\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdots n-c+1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots c}$

Delle Serie delle Potenze.

Capo VI.

Siano in primo luogo le potenze prime

1. 2. 3. 4. 5. .....

Essendo dunque questa la medesima serie, che quella de' numeri naturali, se il numero de' termini si dica n, sarà per le cose dimostrate la somma

$$S = \frac{n \cdot n+1}{1 \cdot 2} = \frac{nn+n}{2}$$

Sia in 2do luogo la serie de' quadrati

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. ......

Essendo dunque il term. n della 3za serie uguale a termini n della 2da, sarà $\frac{nn+n}{2}$.

Computando la loro somma secondo il Canone

Sarà $\frac{Snn + Sn}{2} = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$

Perciò $Snn + Sn = \frac{n^3}{3} + nn + \frac{2n}{3}$

Dunque $Snn = \frac{n^3}{3} + nn + \frac{2n}{3} - Sn$.

Sostituendo in luogo di Sn il valore $\frac{nn+n}{2}$

Sarà $Snn = \frac{n^3}{3} + \frac{nn}{2} + \frac{n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$

Sia in terzo luogo la serie de' Cubi. E poichè il termine n della 4ta serie si uguaglia a tutti quelli della serie precedente

Sarà $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$.

E la loro somma, paragonata giusto il Canone, darà

$$\frac{Sn^3+3Sn^2+2Sn}{6} = \frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}$$

Cioè moltiplicando per 6.

$$Sn^3+3Sn^2+2Sn = \frac{6n^4+36n^3+66n^2+36n}{24}$$

Ma $Sn^3 = \frac{6n^4+36n^3+66n^2+36n}{24} - 3Sn^2 - 2Sn$

cioè sottraendo il trino col duplo de' valori trovati sopra, indi fatte le necessarie riduzioni, si trova

$$Sn^3 = \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

Ovvero $= \frac{6n^4+12n^3+6n^2}{24}$

Col medesimo metodo, procedendo si formeranno i Canoni per qualunque Potenza superiore, come in figura.

Somma de' numeri naturali $= \frac{nn}{2}+\frac{n}{2}$

de' quadrati $= \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$

de' Cubi $= \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$

de' Biquadrati $= \frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$

de' sopra-solidi $= \frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}$

de', quadro-cubi $= \frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}+\frac{n^5}{2}-\frac{n^3}{6}+\frac{n}{42}$

I quali canoni si possono estendere in infinito, osservando l'ordine, secondo il quale essi procedono.

... Serie di Ipsiclo.

Capo VII.

I. Dalla Serie Aritmetiche altre ne inventò Ipsicla. ... una la serie Aritmetica, i cui termini abbino la differenza zero, ò incominci dall'unità; ... aggiugnendo i termini, diverrà una serie di numeri naturali.

Sia in 2.do luogo una serie incominciante dall'unità, che abbia la differenza 1, e altra a, aggiugnendo insieme ... i triangolari.

Conseguentemente se la differenza è 2, i numeri divengono quadrati; se 3. Pentagoni; se 4. Esagoni ecc. come in figura.

" Serie Aritmetica	1. 1. 1. 1. 1. 1.
Serie de' Naturali	1. 2. 3. 4. 5. 6
" Serie Aritmetica	1. 2. 3. 4. 5. 6
Serie de' Triangolari	1. 3. 6. 10. 15. 21
" Serie Aritmetica	1. 3. 5. 7. 9. 11
Serie de' Quadrati	1. 4. 9. 16. 25. 36
" Serie Aritmetica	1. 4. 7. 10. 13. 16
Serie de' Pentagoni	1. 5. 12. 22. 35. 51
" Serie Aritmetica	1. 5. 9. 13. 17. 21
Serie degli Esagoni	1. 6. 15. 28. 45. 66

Chiamansi questi numeri Triangolari, Quadrati, ecc. per l'analogia, che hanno a tali figure.

II. Il lato del Poligono chiamasi il numero dei termini, dai quali a formar il termine della serie.

III. Numero Angolare è l'esponente della figura analoga al numero Poligono. Così nei triangolari è 3., nei quadrati 4., nei pentagoni 5. negli esagoni 6., e generalmente supera di due unità la differenza della serie generatrice.

Problema Primo.

Dato il lato, e il numero Angolare determinare un numero Poligono.

Sia il lato $= n$

Il numero angolare $= a$

Il primo termine della serie generatrice $= 1$.

La differenza de' termini per le cose dette al numero terzo $= a - 2$.

E poichè l'ultimo termine di qualunque serie Aritmetica si agguaglia al termine primo, più al prodotto della differenza nel numero de' termini meno uno

Sarà $= 1 + \overline{n-1} \cdot \overline{a-2} = an - a - 2n + 3$.

E a questo ultimo termine aggiungendo il primo, nel caso nostro l'unità, sarà la somma del primo, ed ultimo

$2 + \overline{n-1} \cdot \overline{a-2} = an - a - 2n + 4$.

Moltiplicando questa somma degli estremi per la metà del numero de' termini, cioè per $\frac{n}{2}$, si ha la somma cercata, cioè

$$\frac{n^2 \cdot \overline{a-2} - n \cdot \overline{a-4}}{2} = \frac{an^2 - an - 2n^2 + 4n}{2}$$

Ma qualsivoglia Poligono agguagliasi alla somma dei termini della serie generatrice. Dunque qualsisia Poligono

si

s'esprimerà per quel Canone. Da questo Canone particolari risulteranno di Canoni particolari per qualunque Poligono.

Imperocchè se $a=3$, qualunque triangolare sarà $=\frac{nn+n}{2}$. Diffatto sostituendo nella somma precedente si ha: $\frac{3n^2-3n-2n^2+4n}{2}$, cioè riducendo

$$\frac{nn+n}{2}$$

Se $a=4$, qualunque quadrato $=\frac{2nn+0n}{2}$. Si deduce sostituendo 4 in luogo di a nella somma precedente

Se $a=5$, qualunque pentagono $=\frac{3n^2-n}{2}$

Se $a=6$, qualunque esagono $=\frac{4n^2-2n}{2}$

Così si trova qualunque altro numero poligono regolare sostituendo sempre il numero analogo alla figura nella detta somma in vece di a.

Problema 2do

Aggiungere quanti vogliano Poligoni che tendano sempre della mede:sima denominazione

Essendo qualunque Poligono $=\frac{n^2\cdot\overline{a-2}-n\cdot\overline{a-4}}{2}$

cioè $an^2-an-2nn+4n$ come si è trovato sopra.

Sarà la Somma di tutti i Poligoni:

$$\frac{Sn^2\cdot\overline{a-2}+Sn\cdot\overline{a-4}}{2}$$

Cioè: $\frac{aSnn-aSn-2Snn+4Sn}{2}$

sostituendo in luogo di Snn e Sn i loro valori già trovati sopra, si avrà la somma di tutti i Poligoni per qualunque serie.

$$\frac{a\,2n^3+a\,3n^2+an}{6}-\frac{an^2-an}{2}-\frac{4n^3-6n^2-2n}{6}+\frac{4n^2+4n}{2}:2$$

Cioè moltiplicando il 2do e 4to termine per 3, indi dividendo il tutto per 2. risulta:

$$\frac{a\,2n^3+a\,3n^2+an-3an^2-3an-4n^3-6n^2-2n+12n^2+12n}{12}$$

Riducendo $\frac{a\,2n^3-2an-4n^3+6n^2+10n}{12}$

Dal qual Canone Universale si fanno de' Canoni particolari determinando la quantità a. Perchè dunque se si cercano triangolari $a=3$, se quadrati $=4$, se pentagoni $=5$ ne verranno i canoni della somma.

Per i triangolari $\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$

Per i Quadrati $\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

Per i Pentagoni $\frac{3n^3+3n^2}{6}$

Per gli Esagoni $\frac{4n^3+3n^2-n}{6}$

Per gli Ettagoni $\frac{5n^3+3n^2-2n}{6}$

Osservando la legge di questi Canoni, non sarà difficile il continuarli per ottenere la somma di qualunque Poligono.

Della Serie Composta

Capo VIII.

Serie Composta dicesi una serie di frazioni, i cui denominatori procedono secondo una legge, e li numeratori secondo un'altra.

Lemma 1mo.

Sia una serie frazionaria infinita

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a+c}{b+d} \cdot \frac{a+2c}{b+2d} \cdot \frac{a+3c}{b+3d} \cdots$$

i cui numeratori, e denominatori procedono Aritmeticamente; dico che l'ultimo termine sarà uguale alla frazione $\frac{c}{d}$; cioè la differenza prima divisa per la diff.a seconda. Imperocchè l'ultimo termine è $= \frac{a+\infty c}{b+\infty d}$. Laonde, perchè le quantità finite a, b, sono trascurabili rispetto all'infinito, sarà $= \frac{\infty c}{\infty d} = \frac{c}{d}$.

Lemma 2do.

Se sia una serie infinita di frazioni: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \cdots\cdots$ in cui li numeratori crescono aritmeticamente, e li denominatori geometricamente, sarà l'ultimo termine $= 0$, e rivolgendo la serie sarà $= \infty$.

Imperocchè i termini geometrici crescono sempre più degli Aritmetici; finalmente divengono infinitamente maggiori.

Perciò nel primo caso l'ultimo termine diviene infinitesimo, cioè 0, e nel 2do ∞.

Ižovin Jasnien XII

Delle serie parimenti infinite i cui denominatori sono continui geometrici (com fici, e i numeratori aquati.

Caso IX.

I. Se i numeratori sono come i numeri naturali come nella serie A, si risolverà la serie in altre infinite geometriche B, C, D, E ecc. la somma delle quali (eccettuata la prima B) formano una nuova serie Geometrica $\mathcal{J}$, la cui somma aggiunta alla somma della serie B, darà tutta la somma cercata.

$$A = \frac{a}{b} + \frac{a+c}{bd} + \frac{a+2c}{bd^2} + \frac{a+3c}{bd^3} \ldots = B + C + D + E \text{ ecc.}$$

$$B = \frac{a}{b} + \frac{a}{bd} + \frac{a}{bd^2} + \frac{a}{bd^3} \text{ ecc.} = \frac{ad}{bd-b}$$

$$\left.\begin{aligned} C &= \ldots \frac{c}{bd} + \frac{c}{bd^2} + \frac{c}{bd^3} \text{ ecc.} = \frac{c}{bd-b} \\ D &= \ldots\ldots \frac{c}{bd^2} + \frac{c}{bd^3} \text{ ecc.} = \frac{c}{bd^2-bd} \\ E &= \ldots\ldots\ldots \frac{c}{bd^3} \text{ ecc.} = \frac{c}{bd^3-bd^2} \\ \text{Ecc} &\ldots\ldots\ldots \text{ Ecc} = \text{ Ecc} \end{aligned}\right\} \mathcal{J}$$

Somma della serie $\mathcal{J} = \frac{cd}{b.\overline{d-1}^2}$, a cui aggiunta $\frac{ad}{bd-b}$ somma della serie B risulta $\frac{ad}{bd-b} + \frac{cd}{b.\overline{d-1}^2}$, somma di tutta la proposta A.

II. Se i numeratori sono come i numeri poligoni si risolverà la serie in altra, i cui numeratori siano come i naturali, e poi come nella precedente Ipotesi

...ia la serie G, essa si scomporrà prima nelle serie L ed H, i cui numeratori saranno Aritmeticamente progressionali

$$G = \frac{c}{b} + \frac{3c}{bd} + \frac{6c}{bd^2} + \frac{10c}{bd^3}\ \&c. \ldots$$

$$L = \frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bd^2} + \frac{c}{bd^3}\ \&c. = \frac{cd}{bd-b}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2c}{bd} + \frac{2c}{bd^2} + \frac{2c}{bd^3}\ \&c. &= \frac{2c}{bd-b} \\
\frac{3c}{bd^2} + \frac{3c}{bd^3}\ \&c. &= \frac{3c}{bd^2-bd} \\
\frac{4c}{bd^3}\ \&c. &= \frac{4c}{bd^3-bd^2} \\
\&c. &= \&c.
\end{aligned}\right\} H$$

La serie H, cioè $\frac{2c}{bd-b} + \frac{3c}{bd^2-bd} + \frac{4c}{bd^3-bd^2}$ &c. si risolva nelle serie M, ed N, i cui numeratori saranno numeri naturali, come segue

$$M = \frac{c}{bd-b} + \frac{c}{bd^2-bd} + \frac{c}{bd^3-bd^2}\ \&c. = \frac{cd}{b.\overline{d-1}^2}$$

$$\left.\begin{aligned}
M = \frac{c}{bd-b} + \frac{c}{bd^2-bd} + \frac{c}{bd^3-bd^2}\ \&c. &= \frac{cd}{b.\overline{d-1}^2} \\
\frac{c}{bd^2-bd} + \frac{c}{bd^3-bd^2}\ \&c. &= \frac{c}{b.\overline{d-1}^2} \\
\frac{c}{bd^3-bd^2}\ \&c. &= \frac{c}{bd.\overline{d-1}^2} \\
\&c. &= \&c.
\end{aligned}\right\} N$$

Posto $\overline{d-1}^2 = z^2$, la serie N diviene $\frac{c}{bz^2} + \frac{c}{bdz^2}$ &c., la cui somma è $\frac{cd}{bz^3}$, a cui aggiunta la somma delle due serie M, ed L, la somma totale della proposta se:

ria G sarà $\frac{cd}{bd-b} + \frac{2cd}{bz^2} + \frac{cd}{bz^3}$, ovvero $\frac{cd^3}{b.\overline{d-1}}$.

Corollario

Quindi, riducendo al medesimo conseguente, si può raccogliere, che $\frac{cd^3}{b.\overline{d-1}^3}$ somma della serie G è a $\frac{cd}{b.\overline{d-1}^2}$ somma della precedente serie F come $d^2 : d-1$.

III. Se i numeratori siano come i piramidali, la serie si risolverà in altra serie, i cui numeratori saranno come i triangolari, e questa sarà alla precedente G come $d : d-1$; però la di lei somma sarà uguale $\frac{cd^4}{b.\overline{d-1}^4}$.

Generalmente, se i numeratori siano figurati di qualunque grado, la somma della serie sarà alla somma della serie risulta del grado precedente, come $d : d-1$; laonde posto m per l'esponente de' figurati, la somma di qualunque serie sarà $=\frac{cd^m}{b.\overline{d-1}^m}$.

Dunque, la somma de' triangulo-piramidali sarà uguale $\frac{cd^5}{b.\overline{d-1}^5}$; de' Piramido-piramidali sarà la somma $= \frac{cd^6}{b.\overline{d-1}^6}$ ec.

IV. Se i numeratori siano come i quadrati; la serie O si risolverà in altra serie P. Q. i cui numeratori saranno aritmeticamente proporzionali in questo modo.

$$O = \frac{c}{b} + \frac{4c}{bd} + \frac{9c}{bd^2} + \frac{16c}{bd^3} \, \&c. \ldots\ldots$$

$$P = \frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bd^2} + \frac{c}{bd^3} \, \&c = \frac{cd}{bd-b}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{3c}{bd} + \frac{3c}{bd^2} + \frac{3c}{bd^3} \text{ ec.} &= \frac{3c}{bd-b} \\
\frac{5c}{bd^2} + \frac{5c}{bd^3} \text{ ec.} &= \frac{5c}{bd^2-bd} \\
\frac{7c}{bd^3} \text{ ec.} &= \frac{7c}{bd^3-bd^2} \\
\text{ec.} &= \text{ec.}
\end{aligned}\right\} R$$

La serie R si risolve in serie di naturali, come la sopraccit.ta serie H, e come segue.

$$\left.\begin{aligned}
S &= \frac{c}{bd-b} + \frac{c}{bd^2-bd} + \frac{c}{bd^3-bd^2} \text{ ec.} = \frac{cd}{b\cdot\overline{d-1}^2} \\
S &= \frac{c}{bd-b} + \frac{c}{bd^2-bd} + \frac{c}{bd^3-bd^2} \text{ ec.} = \frac{cd}{b\cdot\overline{d-1}^2} \\
S &= \frac{c}{bd-b} + \frac{c}{bd^2-bd} + \frac{c}{bd^3-bd^2} \text{ ec.} = \frac{cd}{b\cdot\overline{d-1}^2} \\
& \quad \frac{c}{bd^2-bd} + \frac{c}{bd^3-bd^2} \text{ ec.} = \frac{c}{b\cdot\overline{d-1}^2} \\
& \quad \frac{c}{bd^2-bd} + \frac{c}{bd^3-bd^2} \text{ ec.} = \frac{c}{b\cdot\overline{d-1}^2} \\
& \quad \frac{c}{bd^3-bd^2} \text{ ec.} = \frac{c}{bd\cdot\overline{d-1}^2} \\
& \quad \frac{c}{bd^3-bd^2} \text{ ec.} = \frac{c}{bd\cdot\overline{d-1}^2} \\
& \quad \text{ec.} = \text{ec.}
\end{aligned}\right\} T$$

Dalla serie de' termini T si formano queste due uguali serie de' naturali

$$V = \frac{c}{b\cdot\overline{d-1}^2} + \frac{c}{bd\cdot\overline{d-1}^2} \text{ ec.} \ldots\ldots = \frac{cd}{b\cdot\overline{d-1}^3}$$

$$V = \frac{c}{b\cdot\overline{d-1}^2} + \frac{c}{bd\cdot\overline{d-1}^2} \text{ ec.} \ldots\ldots = \frac{cd}{b\cdot\overline{d-1}^3}$$

Posto $\overline{d-1}^2 = z^2$, la somma delle due uguali serie

V sarà $\frac{2cd}{b\gamma^3}$, a cui aggiunta la somma delle tre ugua-
li serie S e della serie P la somma totale, della propo-
sta serie O, sarà $= \frac{cd}{bd-b} + \frac{3cd}{b\gamma^2} + \frac{2cd}{b\gamma^3}$, ovvero $=$ $\frac{cd^3+cd^2}{b\cdot\overline{d-1}^3}$

V. Se i numeratori siano come i cubi la serie R si risol-
verà in altre Y Z, i cui numeratori saranno i
... dei triangolari più l'unità come in figura.

$$R = \frac{c}{b} + \frac{7c}{bd} + \frac{27c}{bd^2} + \frac{64c}{bd^3} \ \&c. \ldots$$

$$Y = \frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bd^2} + \frac{c}{bd^3} \ \&c = \frac{cd}{bd-b}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{7c}{bd} + \frac{7c}{bd^2} + \frac{7c}{bd^3} \ \&c = \frac{7c}{bd-b} \\ \frac{19c}{bd^2} + \frac{19c}{bd^3} \ \&c = \frac{19c}{bd^2-bd} \\ \frac{37c}{bd^3} \ \&c = \frac{37c}{bd^3-bd^2} \\ \&c = \&c \end{array}\right\} Z$$

Per aver la somma della serie Z, si formino 37. serie geometriche infinite di tre classi cioè

$$7\times\frac{c}{bd-b} + \frac{c}{bd^2-bd} + \frac{c}{bd^3-bd^2} \ \&c = 7\times\frac{cd}{b\,\overline{d-1}^2} = \frac{7cd}{b\cdot\overline{d-1}^2} \ H$$

$$\left.\begin{array}{l} 12\times\frac{c}{bd^2-bd} + \frac{c}{bd^3-bd^2} \ \&c = 12\times\frac{c}{b\,\overline{d-1}^2} = \frac{12c}{b\,\overline{d-1}^2} \\ 18\times\frac{c}{bd^3-bd^2} \ \&c = 18\times\frac{c}{bd\,\overline{d-1}^2} = \frac{18c}{bd\cdot\overline{d-1}^2} \\ \&c \qquad \&c \end{array}\right\} K$$

Di nuovo, per avere la somma della serie K, si formino altre 18. serie infinite geometriche di due classi,

cioè (posto $\overline{d-1}^2 = z^2$)

$$12 \times \frac{c}{bz^2} + \frac{c}{bdz^2} \; ec = 12 \times \frac{cd}{bz^3} = \frac{12cd}{bz^3}$$

$$6 \times \frac{c}{bdz^2} \; ec = 6 \times \frac{c}{bz^3} = \frac{6c}{bz^3}$$

la somma delle quali è $\frac{12cd}{bz^3} + \frac{6c}{bz^3}$, a cui aggiunta $\frac{7cd}{b.\overline{d-1}^2}$, ovvero $\frac{7cd}{bz^2}$, e $\frac{cd}{bd-b}$, somma delle serie H e Y sarà la somma totale della serie $R = \frac{cd}{bd-b} + \frac{7cd}{bz^2} + \frac{12cd+6c}{bz^3}$.

Questa somma non è uguale a quella del Bernulli, il quale fa $\frac{cd^4+4cd^3+cd^2}{b.\overline{d-1}^4}$; a cui però riuscirebbe ugua_le aggiungendo un termine di più alla data serie R, e operando col metodo indicato.

Corollario

Quindi tanto più esatta sarà la somma d'una serie composta infinita, quanto più termini gli si aggiungeranno: la differenza della nostra somma a quella del Bernulli, che eccede della nostra, è $\frac{729}{1544323}$, aggiunto alla data serie R ~~mente~~ un termine di più, e posto c=1, b=2 d=10, però è insensibile, secondo questa ipotesi, benchè fatto d=2 l'errore sarebbe più considerabile, nascendo una differenza 3; perciò nelle serie infinite, e specialmente in simili serie, i cui numeratori procedono come i cubi, e molto più se d eguale a un esponente picciolo a 2, 3, sarà bene di aggiungere alla serie proposta un termine, e anche due di più; nelle altre serie la differenza non è considerabile.

Dai canoni più sù stabiliti, si dedurranno le somme delle serie infinite in qualunque caso, come in figura.

Dei naturali $\frac{1}{2} + \frac{2}{20} + \frac{3}{200} + \frac{4}{2000}$ ec $= \frac{100}{162}$

Dei triangolari $\frac{1}{2} + \frac{3}{20} + \frac{6}{200} + \frac{10}{2000}$ ec $= \frac{1000}{1458}$

Dei piramidali $\frac{1}{2} + \frac{4}{20} + \frac{10}{200} + \frac{20}{2000}$ ec $= \frac{10000}{13122}$

Dei ec . . . .

Dei Quadrati $\frac{1}{2} + \frac{4}{20} + \frac{9}{200} + \frac{16}{2000}$ ec $= \frac{1100}{1458}$

Dei Cubi $\frac{1}{2} + \frac{8}{20} + \frac{27}{200} + \frac{64}{2000}$ ec $= \frac{1566}{1458}$

Della serie infinita di frazioni, i cui numeratori sono uguali e i denominatori numeri figurati, o loro Equimultiplici.

Caso X.

1. Se qualunque termine della serie M sottragasi dal suo antecedente, risulta la serie O, la cui somma è uguale al primo termine della medesima serie M meno l'ultimo, come in figura.

Questo Teorema può provarsi per gli assiomi.

$$M = \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} \text{ ec} \ldots\ldots \frac{a}{\infty c}$$

$$N = \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \frac{a}{6c} \text{ ec serie sottratta}$$

$$O = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} \text{ ec} = \frac{a}{c} - \frac{a}{\infty c} = \frac{a}{c}$$

Poichè l'ultimo termine $\frac{a}{\infty c}$ della prima serie M è infinitesimo, la somma della serie O, sarà $= \frac{a}{c}$, cioè uguale al primo termine della prima serie.

Ma

Ma se l'ultimo termine non è infinitesimo la somma non può ritrovarsi eguale al primo termine della serie.

Sia la serie $S = \frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} \dots \frac{\infty a}{\infty c}$

Sia sottraendo $T = \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} \dots$

Resta la serie $O = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} \dots$

$= \frac{2a}{c} - \frac{\infty a}{\infty c} = \frac{a}{c}$ somma cercata.

Dalla serie S sottratta la serie T, resta la serie O del tutto eguale alla serie C del mio assunto, nè quindi però segue che la di lei somma eguagli $\frac{2a}{c}$, primo termine della serie S; imperocchè, com'è chiaro, ella è $= \frac{a}{c}$

2. Sia la serie Armonica:

$A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots \dots \frac{1}{\infty}$

e sottraggasi da se stessa come mi recati assunti, risulterà una nuova serie B

$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$ &c $= \frac{1}{1} - \frac{1}{\infty} = 1$.

Poichè la somma di questa nuova serie B deve eguagliarsi al primo termine della serie A meno l'ultimo per le cose predette, ed essendo infinitesimo l'ultimo termine della serie Armonica sarà questa nuova somma eguale al primo termine, e però $= 1$.

Inoltre, perchè i denominatori della serie B sono doppi de' triangolari, moltiplicando i suoi termini per 2, risulterà una nuova serie C

$C = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$ &c

i cui denominatori sono triangolari, cioè, perchè i termini

sono doppi della precedente serie B sarà la di lei somma dupla, cioè = 2.

3. Se la serie C sottraggasi da se stessa, come sopra, risulta un'altra serie D

$D = \frac{2}{3} + \frac{3}{18} + \frac{4}{60} + \frac{5}{150}$ ec. ....

Ovvero (perchè $\frac{3}{18} = \frac{2}{12}$, e $\frac{4}{60} = \frac{2}{30}$, e $\frac{5}{150} = \frac{2}{60}$ ec.)

$D = \frac{2}{3} + \frac{2}{12} + \frac{2}{30} + \frac{2}{60}$ ec.

La cui somma (per il n.° 1.) è = 1. . . . . . (4)

Perchè poi i denominatori di questa serie sono tripli de' piramidali, se ciascun termine si moltiplichi per 3. risulta la serie E

$E = \frac{2}{1} + \frac{2}{4} + \frac{2}{10} + \frac{2}{20}$ . . . . . .

i cui denominatori sono piramidali, e se di nuovo i termini si dividono per 2. insorge la serie F

$F = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}$ . . . . .

i cui numeratori sono unità, e i denominatori numeri piramidali.

Si moltiplichi dunque la somma della serie D per $\frac{3}{2}$, e si avrà la somma della serie $F = \frac{3}{2}$, e della serie $E = 3$

Imperocchè moltiplicando la serie D per $\frac{3}{2}$ risulta una serie = alla serie F, però essendo la somma della serie $D = 1$ sarà $F = \frac{3}{2}$ e quindi E (ch'è dupla di F) = 3.

4. Se la serie F sottraggasi da se stessa risulta la serie G

$G = \frac{3}{4} + \frac{6}{40} + \frac{10}{200} + \frac{15}{700}$ . . . .

Ovvero (perchè $\frac{6}{40}=\frac{3}{20}$, $\frac{10}{200}=\frac{3}{60}$, ecc)

$G=\frac{3}{4}+\frac{3}{20}+\frac{3}{60}+\frac{3}{140}$ ecc

la cui somma (per il n° 1.) è = 1.

Siccome poi i denominatori sono quadrupli di triangolo piramidali, se si moltiplichino i termini per $\frac{4}{3}$, ne risulta una nuova serie H.

$H=\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}\cdots\cdots$

i cui numeratori sono unità e i denominatori triangolo piramidali.

Essendo dunque la somma della serie $G=1$. Moltiplicando per $\frac{4}{3}$ sarà la somma della serie $H=\frac{4}{3}$.

Le somme fin qui trovate sono $\frac{1}{0}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$.

Continuando ad operare col medesimo metodo, si troveranno le somme delle nuove serie nascenti e saranno $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{7}$ in infinito.

Scolio.

La somma della serie infinita Armonica

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

è infinita.

Giovanni Bernulli trovò un'elegante dimostrazione di questo Teorema.

Imperocchè avendo cavato col sottrarre la serie nascente, trovò $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{30}\cdots\cdots$

la cui somma = 1.

Conservando poi ciò che risulta notato da questa

serie $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{20} \cdot \frac{5}{30}$ ec. risolvendola in altre col meto-
do permesso al Capo preced.te trovò la verità della pro-
posiz. e da un assurdo manifesto il qual seguirebbe
se si determinasse fin. la somma della serie Armo-
nica. Cioè osservò che la serie

* A. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ ec. = (trasmutate le frazioni in altre,
i cui numeratori siano 1, 2, 3, ec.)

B. $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}$ ec. $= C+D+E+F$ ec.

$$\left.\begin{array}{l} C\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30} \text{ ec.} = (\text{come sopra})\ \frac{1}{1} \\ D \cdots \frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30} \text{ ec.} = C-\frac{1}{2} = = = \frac{1}{2} \\ E \cdots\cdots \frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30} \text{ ec.} = D-\frac{1}{6} = = = \frac{1}{3} \\ F \cdots\cdots\cdots \frac{1}{20}+\frac{1}{30} \text{ ec.} = E-\frac{1}{12} = = = \frac{1}{4} \\ \qquad\qquad \text{ec.} = \qquad\qquad \text{ec.} \end{array}\right\} G$$

Onde ne seguirebbe, che la serie G ossia = A cioè
il tutto uguale a . . . . , se la somma fosse finita.

Corollario primo. Quindi di ogni altra serie infinita
Armonica $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{40}$ ec. (dove ciascun termine è un
decuplo di ciascuno corrisp. . . . . . . altra, e però
tutta la serie subdecupla di tutta la serie) la somma
è infinita. Imperocchè la parte decima dell'infinito
è pure quantità infinita

Corollario 2do. Dunque la somma di qualunque
se. infinita, i cui numeratori siano unità, e i deno-
minatori ov. . . tamente come i figurati, si ~~ap~~ . . .
\+ . . . termini della serie A si moltiplicano . . . . . il . . .
. . . . . . mat.te num.o incominciando p. 2. la 2da la 3a p. . . .

rà per questa serie $\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}$ &c.

Corollario 3zo. La somma della serie infinita il cui termine ultimo è infinitesimo, e poi svanisce, alle volte è finita come si è veduto nel Capo precedente e alle volte è infinita, come si è veduto nel presente.

Problema.

Trovare in infinito serie infinite sommabili.

Sia la frazione $\frac{\phi}{p+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$, &c. moltiplicando per $p+x$, e ordinando si avrà

$$\phi = \begin{cases} Ap + Bpx + Cpx^2 + Dpx^3 + Epx^4 \text{ \&c.} \\ \quad\; Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 \text{ \&c.} \end{cases}$$

Trasponendo ϕ

$$0 = \begin{cases} Ap + Bpx + Cpx^2 + Dpx^3 + Epx^4 \text{ \&c.} \\ -\phi + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 \text{ \&c.} \end{cases}$$

Ora, poichè il secondo membro è zero, si distruggeranno i termini della colonna, e si avranno tante Equazioni, quanti sono i coefficienti indeterminati A, B, C, &c. che così si determineranno, trasponendo come segue

I. $Ap - \phi = 0$. II. $Bpx + Ax = 0$. III. $Cpx^2 + Bx^2 = 0$. IV. $Dpx^3 + Cx^3 = 0$. V. $Epx^4 + Dx^4 = 0$, &c.

La prima Equazione dà $A = \frac{\phi}{p}$. Sostituito questo valore nella IIda, diviene $B = -\frac{\phi}{p^2}$. Sostituendo nella terza si avrà $C = \frac{\phi}{p^3}$, &c. Onde sostituendo di nuovo invece di A, B, C, &c. i loro valori nella prima Equazione, si ottiene $\frac{\phi}{p+x} = \frac{\phi}{p} - \frac{\phi x}{p^2} + \frac{\phi x^2}{p^3} + $ &c., e la legge della serie si manifesta, cioè è facile a continuarla a piacere.

Sia per esempio la frazione $\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}$, e sarà $a = 1$; $x = 1$; $p = 2$, e diverrà la serie

$$\frac{1}{1} - 2 + 4 - 8 + 16 \ldots\ldots = \frac{1}{3}$$

Delle Variazioni

Capo XI.

Variazioni si chiamano certe mutazioni di cose rispetto all'ordine, o sito, le quali possono accadere in diversi modi:

Le cose poi variabili o sono tutte fra loro diverse, o tutte o alcune le medesime, le quali di qualunque genere si siano, si esprimeranno per altrettante lettere dell'alfabetto.

Problema primo.

Determinare il numero delle variazioni quando le cose variabili sono tutte fra loro diverse.

Non potendosi determinare il numero delle variazioni di molte cose se questo non sia stato prima ritrovato in tutte le altre di minor numero, è chiaro che in tale ricerca conviene procedere con metodo sintetico, incominciando dalle ipotesi prime e più semplici. Ciò premesso sia

1. di una sola cosa a, vi è una sola posizione.

2. di due cose a, b, vi sono due variazioni, cioè ab, ba.

3. Se poi siano tre cose diverse a, b, c, queste prima in tal modo potranno disporsi, che la prima sia a, e perchè le due rimanenti si possono disporre in due modi ne segue che essendo a, la prima, si hanno due variazioni; due parimenti se pongasi per la prima b; e due se pongasi prima c. Laonde di tre cose diverse a, b, c, vi sono tre volte due, ovvero 6. variazioni, cioè

abc, acb; bac, bca, cab, cba.

4. Se vi siano quattro cose diverse a, b, c, d, perchè per qualunque che pongasi prima vi sono 6. variazioni delle tre rimanenti, essendo 4. le cose che possono occupare il primo luogo ne segue, che di 4. cose diverse a, b, c, d, si hanno 4. volte 6. cioè ventiquattro variazioni.

Laonde ne risulta la seguente regola, che descrivansi i numeri naturali cominciando dall'unità finchè si pervenga al numero esprimente il dato numero di cose, tutti questi numeri fra loro moltiplicati daranno il numero delle variazioni ricercato.

Sia qualunque numero n, di cose, e si cerchi il numero delle loro variazioni. Si avrà

$$1.2.3.4.5.\ldots.n.$$

Imperocchè il primo numero 1. esprimerà le variazioni 1. di una sola cosa.

Il primo col 2do fra loro moltiplicati, cioè 1.2 esprimeranno le variazioni 2 di due cose.

Il primo col secondo, e terzo fra loro moltiplicati, cioè

1. 2. 3. esprimeranno il numero delle variazioni di tre cose il quale è 6. e così necessariamente.

Quindi, se siano 8. cose diverse a, b, c, d, e, f, g, h, = n = 8; le loro variazioni saranno

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

Problema 2.do

Determinare il numero delle variazioni, quando alcune delle cose variabili sono della stessa specie.

Sia il numero delle cose 6. in cui una si ripeta tre volte, per esempio aaa b c d nelle quali la cosa a, si replica tre volte.

Per determinare le loro variazioni osservo in primo che se tutte fossero fra loro diverse, e invece delle tre aaa fossero le tre aA2 potrebbero queste variarsi in sei modi per le cose dette, restanti immutando le altre. Ma essendo per ipotesi simili e però da considerarsi come una sola cosa ne segue che il numero totale delle variazioni di tutte le cose date aaa bcd dee essere sei volte minore del numero delle variazioni, che sarebbero se tutte le cose date fossero fra loro diverse, cioè tante volte minore, quante variazioni potrebbero le simili, se invece di essere aaa, fossero aA2: ma se tutte le 6. cose esistessero diverse potrebbero, per le cose predette variarsi in 720. modi (imperocchè 1. 2. 3. 4. 5. 6. = 720) dunque nella nostra ipotesi, dove tre di esse sono simili il numero delle

delle variazioni sarà $= \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3} = \frac{720}{6}$, cioè 120.; cioè generalmente parlando il numero totale delle variazioni, come se tutte le cose date fossero diverse, deve esser diviso per il numero delle variazioni delle cose simili, come diverse concepite.

Che se siano date 6. cose aaabbc, dove oltre la cosa a, che tre volte si ripete, ancora la cosa b, si repliche due volte, è manifesto, che il numero totale delle variazioni diviene ancora due volte minore di quello, che era rimasto nel caso precedte cioè siccome per tre aaa deve dividersi il numero totale delle variazioni p. 6. così per due bb si deve dividere di nuovo p. 2., ovvero il totale 720 p. due volte 6., cioè p. 12. è però tolta la parte 12., cioè menomato 12. volte, resterà 60 soltanto il numero totale delle variazioni.

Onde ne risorge un metodo generale per determinare il numero delle variazioni in qualunque ipotesi; cioè si forma prima il numero totale che corrisponde al numero di cose date come se esistessero tutte diverse, e questo numero si divide pel prodotto delli prodotti corrispondti alle cose simili come se fossero diverse.

Così se diansi otto cose, due delle quali siano della medesima specie, il numero di tutte le variazioni possibili sarà

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.\;1.2.3} = \frac{40320}{12} = 3360.$$

Scolio.

L'uso della teoria delle variazioni è insigne per ch

determinare il numero degli anagrammi di qualunque voce. Per esempio tutte le variazioni possibili delle lettere componenti la voce Roma sono 1.2.3.4 = 24 a cagione delle 4. lettere fra loro diverse per il probl. 1mo.

Nella voce Leopoldus il numero di tutte le variazioni possibili è $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{2.2} = \frac{362880}{4} = 90720$, a cagione delle 9. lettere, e in quelle due l, e due o, per il probl. 2do.

Similmente nella voce Studiosus, in cui la lettera u si ripete due volte, e tre volte la lettera s, il numero di tutte le variazioni possibili per probl. 2do sarà $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.\ 1.2.3} = \frac{362880}{12} = 30240$.

Delle Combinazioni

Capo XII.

1. Le combinazioni si chiamano certe congiunzioni di cose prese da qualche moltitudine, le quali si congiungono insieme senza veruna riguardo al sito, ovvero al luogo.

2. Se si piglino due a due le combinazioni si intitolano per li binarj, se tre a tre per li ternarj, così li Quadernarj, Quinquinarj &c. Se si piglino una ad una allora la combinazione si dice di unità; se nessuna si prende, la combinazione è nulla.

3.

3. Il numero poi secondo cui si combina diesi l'esponente della combinazione, il quale, se si pigliano le cose due a due è = 2, se tre a tre = 3. e con.° successivamente do [illegible]

Problema primo

Determinare il numero delle combinazioni, quando le cose da combinarsi sono tutte diverse, ma ciascuna può essere ancora combinata con se stessa.

Sieno da combinarsi le cose a, b, c, d ec.

Per conoscere le loro combinazioni si pongono prima in serie le cose date a, b, c, d, come vedesi in figura. Indi la cosa a, si congiunga, e con se stessa, e con ciascuna delle rimanenti b, c, d, e si pongono ordinatamente i binarj, sicchè alla lettera a corrisponda aa, alla lettera b, corrispondano ab, bb, alla lettera c corrispondano ac, bc, cc. Finalmente alla lettera d corrispondano ad, bd, cd, dd e si avranno tutti i binarj possibili. Per avere i ternarj conviene combinare ciascuna lettera, e con li binarj della sua serie, e con li binarj delle altre serie, come in figura

a . aa . aaa .

b . ab . bb . aab . abb . bbb .

c . ac . bc . cc . aac . abc . bbc . acc . bcc . ccc .

d . ad . bd . cd . dd . aad . abd . bbd . acd . bcd . ccd . add . bdd . cdd . ddd .

Se attentamente si considera questa tavola facilmente si conoscerà, che la combinazione delle unità forma la serie delle unità 1.1.1.1.

- Che i binarj costituiscono la serie de' numeri naturali, cioè 1.2.3.4.

I ternarj la serie de' triangolari 1.3.6.10.

E se la tavola si continua si conoscerà, che i quaternarj formano la serie de' piramidali 1.4.10.20.35.

I quinquenarj, la serie de' triangolo-piramidali 1.5.15.35.70. e così successivamente.

Dalle quali cose ne risulta il metodo, onde determinare il numero cercato delle combinazioni nel problema, secondo qualunque esponente.

Imperocchè sia n il numero delle cose da combinarsi, e saranno le combinazioni solitarie eguali alla somma delle unità, i binarj eguali alla somma de' numeri laterali, ovvero naturali, i ternarj eguali alla somma de' triangolari; i quaternarj alla somma de' piramidali; i quinquenarj de' triangolo-piramidali, e così successivamente.

Laonde lo stesso canone, da cui si danno le somme de' numeri figurati si avranno ancora le somme, cioè il numero delle combinazioni secondo qualunque esponente, cioè

$$\frac{n\cdot n+1\cdot n+2\cdot n+3\cdot n+4\cdots\cdots n+c-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots\cdots c}$$

Siano per esempio, da determinarsi i binarj di 4. cose diverse, e le medesime ancora combinabili.

Sarà in tal caso n=8; c=2.

Laonde il canone diviene $\frac{8.9}{1.2}=\frac{72}{2}=36$.

Se si cerchino i ternarj diviene il canone $\frac{8.9.10}{1.2.3}=$
$=\frac{720}{6}=120$.

Se li quadernarj $\frac{8.9.10.11}{1.2.3.4}=\frac{7920}{24}=330$.

Se le cose da combinarsi sieno 4. e si cerchino i quinquinarj, allora sarà n=4, c=5.

E diverrà il Canone $\frac{4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5}=\frac{6720}{120}=56$.

Problema 2do.

Determinare il numero delle combinazioni, quando le cose da combinarsi sono tutte diverse, ma niuna può esser combinata con se stessa.

Le cose da combinarsi si dispongano in serie, e formeranno la serie delle unità. Per avere li binarj si conjunga ciascuna con ciascuna altra delle precedti, e per avere i ternarj si conjunga ciascuna con li binarj precedti, e così di seguito..

Laonde se le cose date siano a, b, c, d, e, le loro combinazioni saranno come in figura.

a

b. ab

c. ac. bc. abc

d. ad. bd. cd. abd. acd. bcd. abcd

e. ae. be. ce. de. abe. ace. bce. ade. bde. cde. abce.
abde. acde. bcde. abcde

Se la figura attentamente si considera, si vedrà che le serie delle combinazioni formano le serie de' numeri figurati, incominciati da' zeri.

Così le quantità solitarie formano la serie delle unità generatrici 1.1.1.1.1.

I Binarj formano la serie de' numeri laterali, ovvero naturali. 0 1 2 3.4

I Ternarj de' Triangolari 0 0 1.3.6

I Quaternarj de' Piramidali 0.0 0 1 4

I Quinarj de' Trigonometrali 0.0.0.0.1

La somma dunque delle combinazioni saranno eguali alla somma de' numeri figurati incominciati da' zeri.

Onde se le cose da combinarsi si dicano n.

La somma delle unità sarà $= n$.

La somma de' Binarj $= \dfrac{n.\overline{n-1}}{1.2}$

La somma de' Ternarj $= \dfrac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}$

La somma de' Quaternarj $= \dfrac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4}$

E generalmente essendo l'esponente uguale a c, saranno le combinazioni

$$\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}\ldots\ldots\overline{n+1-c}}{1.2.3.4.5.6\ldots\ldots c}$$

Saranno dunque 90 cose diverse, [illegible] delle quali [illegible] combinazioni [illegible].

sarà

sarà la somma delle unità = 90

la somma de' Binarj = $\frac{90.89}{1.2}$ = 4005

de' Ternarj = $\frac{90.89.88}{1.2.3}$ $\frac{704880}{6}$ = 117480

de' Quadernarj = $\frac{90.89.88.87}{1.2.3.4.}$ = $\frac{61324560}{24}$ = 2555190.

de' Quinarj = $\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}$ = $\frac{5273912160}{120}$ =

= 43949268.

Nota. Se siano più cose da combinarsi, e special-mente se l'esponente è numero grande, si potrà (per compendio del calcolo) abbassare i termini, cioè ciascun numeratore con ciascun denominatore, se sono riducibili, prima di fare la moltiplicazione.

Problema 37°.

Dato, nella stessa ipotesi, il numero delle cose combinabili, e dato l'esponente della combinazione e del medesimo numero si scelgano alcune cose come A, B, C, D, E. Determinare quante combinazioni contengano A, B, C, esclusa la rimanenti D, ed E.

Sia n il numero delle cose da combinarsi, il numero delle cose scelte m, la parte di esse da includersi b, l'esponente c; però il numero delle cose, toltone le scelte n−m, le quali combinate secondo l'esponente c−b, daranno, per la regola precedente il Canone.

$$\frac{n-m.n-m-1.n-m-2.\ldots.n-m-c+b+1}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots c-b}$$

e si avranno le combinazioni di tutte toltone la cifra b.

Aggiungendo a queste combinazioni la parte b, allora si avranno le combinazioni secondo l'esponente c, cioè quanto si cercava.

Siano per esempio 20. cose, delle quali se ne scelgano 5; e si cerchino i ternarj, in cui 2. delle elette si combinino con le 2. rimanenti, allora il canone darà $\frac{15.14.13}{1.2.3} = \frac{2730}{6} = 455$. della qual cosa si può comprendere esser lo stesso, che il determinare i ternarj delle 15. rimanenti.

Problema 45°.

Dato il numero delle cose da combinarsi, nessuna delle quali può essere combinata seco medesima, determinare il numero delle combinazioni [illegible] qualunque esponente.

Sia il numero dato si dica n e l'esponente c, il numero delle combinazioni senza le variazioni si esporrà per il Canone $\frac{n.n-1.n-2.n-3 \ldots n-c+1}{1.2.3.4 \ldots c}$ come è manifesto dalle cose dette.

Ma poichè tutte queste combinazioni si compongono da una quantità di cose diverse, il cui numero è c; e però (p. [illegible] 1° (cap. 11.) possono variarsi

(giusta il canone) 1.2.3.4. . . . . e volte, ne segue, che per ottenere variati in tutti i modi possibili il numero delle combinazioni basti questo moltiplicare nel numero delle variazioni; onde ricavasi il canone

$n . n-1 . n-2 . n-3 . . . . . . n-e+1$

Laonde se siano 10. cose, e si cerchino i senarj variati il canone diviene $10.9.8.7.6.5 = 15'1200$.

Cioè il numero delle combinazioni di tutti i senarj variati è 15'1200, dove il numero delle sole combinazioni non sarebbe, che 210.

Problema 5to.

Dato il numero delle cose da combinarsi, ciascuna delle quali può essere combinata seco medesima, determinare il numero delle combinazioni variate secondo qualunque esponente.

Siano quante si voglia cose a, b, c, d, il numero delle quali sia $= n$.

È prima il numero delle combinazioni solitarie sarà $=$ al numero delle cose date, cioè $= n$.

Per avere i Binarj, congiungasi a, per la prima, e si avranno i Binarj aa, ab ac, ad, il numero de' quali è $= n$; cioè, nella nostra ipotesi, $= 4$, e perchè per qualunque altra delle cose date, che si congiunga prima, si hanno altrettanti binarj, saranno 16. i Binarj, e universalmente in qualunque caso, sarà il loro numero $= nn$.

Algebra Tornion XIII.

Se con li Binarj si combini di nuovo la prima lettera, risultano 16. Ternarj, perciò combinandole tutte, saranno 4. volte 16, cioè 64., numero cubico; laonde, universalmente il numero delle combinazioni variate ne' Ternarj è $= nnn$, ovvero $= n^3$.

Col medesimo metodo si trova, che il numero di Quadernarj è $= n^4$, di Quinarj $= n^5$; e, posto l'esponente e, il canone sarà per qualunque caso $= n^e$.

Siano date 6. cose, delle quali si cerchi il numero delle combinazioni de' quadernarj combinabili pure con se stesse, e in tutti i modi possibili variate, darà il canone $n^e = 6^4 = 1296$.

Similmente date 9. cifre numeriche 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, i quadernarj combinati, e variati in tutti i modi possibili sono $9^4 = 6561$.

Similmente, se siano le vocali A, E, I, O, con le quali in Logica si esprimono le quattro specie delle proposizioni la prima Universale Affermativa, la 2da Universale Negativa la 3za Particolare Affermativa. la 4ta Particolare Negativa, ciascun ternario, delle quali costituisce un Sillogismo, si combinaranno tutti i Sillogismi possibili, determinando tutti i possibili Ternarj, secondo la fatta ipotesi, e saranno giusto il canone $= 4^3 = 64$, non 36. come erroneamente determinò Aristotele, con li suoi interpreti.

Ma di tutti questi Sillogismi quattro soli sono i conclu-
denti:

Delle Potenze del Binomio In Infinito.

Capo XIII.

Sia il Binomio $a+b$, e per se stesso si moltiplichi, sarà il suo quadrato $aa+2ab+bb$, il di cui cubo $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, e continuando la moltiplicazione per $a+b$, saranno le di lui potenze come in figura.

a	b							
a^2	$2ab$	b^2						
a^3	$3a^2b$	$3ab^2$	b^3					
a^4	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	b^4				
a^5	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	b^5			
a^6	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	b^6		
a^7	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	b^7	
a^8	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	b^8

Se si consideri questa tavola, si osserverà, che i termini delle potenze si compongono di numeri, e di lettere. Con qual legge procedono le lettere, non è difficile il conoscerlo, se si esamini il loro ordine in ciascuna di tali potenze. Imperocchè in qualunque potenza la lettera a incomincia da quell'esponente, a cui deve essere elevato il Binomio, e discende gradatamente per tutta la potenza sino alla potenza, ovvero esponente zero. All'

incontro la lettera b incomincia dall'esponente zero, e ascende gradatamente sino al massimo esponente dato, donde ne segue, che gli aumenti letterali si trovino facilmente

Sia il Binomio a+b da innalzarsi alla potenza 6ta si formino le due serie A, e B con tutti gli esponenti della prima lettera a dal 6. sino al zero, indi dalla lettera b dal zero sino al 6. come segue.

A $a^6 . a^5 . a^4 . a^3 . a^2 . a^1 . a^0$

B $b^0 . b^1 . b^2 . b^3 . b^4 . b^5 . b^6$

C $a^6 . a^5b . a^4b^2 . a^3b^3 . a^2b^4 . ab^5 . b^6$

I prodotti di una serie A si moltiplichino per ciascun prodotto dell'altra serie B, e si avranno i prodotti letterali, come si vedesi nella serie C.

Per avere poi i numeri coefficienti, si deve osservare ch'essi procedono secondo le combinazioni dell'esponente dato. Laonde nella potenza 6ta, il cui esponente è 6. il primo coefficiente è 1. cioè lo stesso che la combinazione zero, il 2do è 6. cioè il numero della combinazione delle unità, il 3zo è 15. cioè uguale a tutti i binarj dell'esponente 6. quindi 20. 15. 6. 1; cioè quanti sono i Ternarj, i Quadernarj, li Quinarj, e li Senarj dello stesso esponente 6.

Similmente i coefficienti del Binomio a+b esaltato alla potenza settima sono 1. 7. 21. 35. 35. 21. 7. 1, cioè quante sono le combinazioni dell'esponente sette, in-

co-

cominciando dalla combinazione zero sino ai settenari.

Essendo il medesimo canone, che contiene le combinazioni conterrà ancora i coefficienti del Binomio, e se l'esponente si dica n saranno i Coefficienti di qualunque potenza in infinito

$$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5 \ldots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots}$$

E il Canone per tutte le Potenze in infinito sarà

$$\overline{a+b}^{\,n} = \begin{cases} a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 \\ + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 \\ + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 \\ + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5} b^5 \\ + \&c \end{cases}$$

Scolio.

Poichè l'esponente n può esprimere un numero tanto positivo, quanto negativo, intiero, e frazionario, è utilità grande, e ammirabile di questo Canone in ciò specialmente consiste, che egli serve egualmente per innalzare le quantità tanto alle potenze positive, quanto alle negative, cioè tanto per formare qualunque potenza di una quantità data, quanto per estrarre da essa qualunque radice.

e per questa differenza, che quando l'esponente della data potenza è positivo, perchè allora è numero intero, la serie finalmente converge, e diviene finita. Ma se si debba estrarre la radice ..., n, in tale caso, è quantità frazionaria, la serie sempre diverge e diviene infinita.

Ma, per esempio, se si debba inalzare il Binomio $a+b$ alla potenza 2da e allora sarà l'esponente $n=2$. Facendo secondo il canone la potenza cercata sarà $a^2+2ab+b^2$.

E se si dovrà elevare alla potenza 6ta, allora sarà $n=6$, e la potenza cercata, giusta il canone, sarà

$$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

Ma, se da $a+b$ si debba estrarre la radice quadrata in tal caso si dovrà inalzare $a+b$ alla potenza $\frac{1}{2}$; per cui sarà l'esponente $n=\frac{1}{2}$ e giusta il canone si avrà

$$a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot a^{\frac{1}{2}-1}b+\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}-1}{1}:\frac{1\cdot 2}{1}\cdot a^{\frac{1}{2}-2}b+\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}:3a^{\frac{1}{2}-3}b$$

.... &c. Cioè riducendo

$$(a+b)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot a^{-\frac{1}{2}}b+\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{4}\cdot a^{-\frac{3}{2}}b \text{ ...... in infinito}$$

Ovvero

$$\overline{a+b}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}+\frac{1}{2}b:\sqrt{a}+\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{4}b^2:\sqrt{a^3}\text{ ....}$$

$$\text{Ovvero}=\sqrt{a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{4}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^3}}\text{ ....}$$

Ovvero se i termini a, b, del binomio siano ambo quadrati, e il secondo termine è negativo, fatta la riduzione totale, sarà

$$(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} a - \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{b^4}{a^3} \\ - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{b^6}{a^5} \\ - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{b^8}{a^7} \\ - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{b^{10}}{a^9} \ \&c. \end{cases}$$

Qui chiaro si manifesta la legge che osservano i coefficienti, dove si vede che cominciando dal 2do termine i soli numeri pari si entrano nella composizione de' denominatori, mentre gl'impari, cominciando dal 3zo termine, formano i numeratori. È facile dunque il continuar l'approssimazione a piacere.

Che se in vece di a^2-b^2 si avesse a^2+b^2, si avrebbe lo stesso risultato, ma con segni alternativi [illegible]

$$(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} a + \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{b^4}{a^3} \\ + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{b^6}{a^5} \\ - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{b^8}{a^7} \ \&c. \end{cases}$$

Con queste formule si trovano le radici approssimate delle quantità irrazionali. Si sa che la radice quadrata di 5. è tra 2. e 3. Per determinare prossimamente di quanto essa supera 2. trasformo 5. in due termini,

onde avere il Binomio numerico 4+1, talchè applicando la formula sarà $a^2=4$, $b^2=1$, e $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}=(4+1)^{\frac{1}{2}}$
$= 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{32}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}$
$\cdot\frac{1}{128}$ . . . .

Fermandosi à due primi termini si avrebbe $2\frac{1}{4}$ per $\sqrt{5}$, che non è molto esatto, poichè $(2\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}=\frac{81}{16}=5\frac{1}{16}$. Onde si vede che $\sqrt{5}$ è tra 2, e $2\frac{1}{4}$. Fermandosi à tre primi termini si avrebbe $2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{143}{64}$. Ora $(\frac{143}{64})^{\frac{1}{2}}$ $=\frac{20449}{4096}=5-\frac{31}{4096}$. Dunque la radice prossima è maggiore di $\frac{143}{64}$, cioè maggiore di $2\frac{15}{64}$; ma si è trovata minore di $2\frac{1}{4}$, ovvero di $2\frac{16}{64}$: dunque ella è tra $2+\frac{15}{64}$, e $2+\frac{16}{64}$.

Calcolando altri termini, sempre più si restringeranno i limiti tra cui sta $\sqrt{5}$, senza però potersi mai pervenire al suo vero valore, poichè, come si è detto al Capo 2.do Lezione 1.a la radice di una quantità irrazionale, per numeri è inassegnabile.

L'estrazione delle altre radici s'istituisce collo stesso metodo: la sola differenza è nelle sostituzioni dell'esponente. Così se si debba estrarre la radice cubica di a+b, si avrà

$$(a+b)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}a^{\frac{1}{3}-1}b+\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{2}\cdot a^{\frac{1}{3}-2}b^2 + \text{\&c, cioè}$$

$$(a+b)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}a^{\frac{-2}{3}}b-\frac{1}{9}a^{\frac{-5}{3}}b^2+\frac{5}{81}a^{\frac{-8}{3}}b^3-\text{\&c}$$

ovvero

$$\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{a}+\frac{\frac{1}{3}b}{\sqrt[3]{a^2}}-\frac{\frac{1}{9}b^2}{\sqrt[3]{a^5}}+\frac{\frac{5}{81}b^3}{\sqrt[3]{a^8}}-\frac{\frac{10}{243}b^4}{\sqrt[3]{a^{11}}}+\&c.$$

$$\text{Dunque } \sqrt[3]{1-b^3}=1-\frac{b^3}{3}-\frac{b^6}{9}-\frac{5b^9}{81}-\frac{10b^{12}}{243}-\&c.$$

Applichiamo questa formula ad un esempio. Sia 100, da cui si debba estrarre la radice cubica. Trasformo 100. in 125 − 25 (il fine di ciò egli è di avere per a un cubo perfetto). Sarà dunque 125 = a, 25 = b, e però

$$(125-25)^{\frac{1}{3}}=125^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\cdot125^{-\frac{2}{3}}\cdot25-\frac{1}{9}\cdot125^{-\frac{5}{3}}\cdot25^2 \ldots \&c$$

Calcolando i soli primi termini si trova $\sqrt[3]{100}=4+\frac{283}{441}$ una unità crescente.

La stessa formula serve egualmente per elevare il trinomio $a+b+c$, se si riduce $b+c$ ad un solo termine e similmente a qualunque Polinomio, dove cresce solo la fatica del calcolo non la difficoltà del metodo.

Il Fine dell'Algebra Elementare.

Dell'Algebra Sublime

ovvero

Delle alte Equazioni

Parte 2da.

Sezione prima

Definizioni, e Spiegazioni di alcuni termini

Capo I.

1. Equazione è una comparazione di due quantità eguali, come se abbiasi $2x = 12$, ovv.° $3x + 4 = 16$, oppure $bx + xx = c^2$

2. Equazione paragonata ovvero ordinata è un'aggregato di due, o più quantità, che insieme prese sono eguali al zero, come $x^2 - ax + bx + a^2 - ab = 0$.

3. Equazione quadratica è quando il più alto grado dell'incognita ascende al quadrato come $x^2 + ax - b^2 = 0$.

4. Equazione Cubica ovv.° di terzo grado dicesi se il massimo grado dell'incognita ascende alla potenza terza, come $x^3 + ax^2 + bx = c$, ovvero $x^3 + ax^2 + abx - c^3 = 0$

5. Equazione quadrato-quadratica ovv.° Biquadratica, se il più alto grado a cui ascende l'incognita è una potenza di quarto grado come $x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 6x - 10 = 0$, e così procedendo.

[illegible] si dica [illegible] di primo grado il probl., quando l'Equazione, che lo esprime, è [illegible] di primo grado [illegible] e di secondo grado, se l'Equazione, che lo esprime, sia pure di 2do grado [illegible] solido ovvero di terzo grado se [illegible] [illegible] esprime sia altresì del terzo grado, e così degli altri.

7 Le grandezze, che compongono un'Equazione [illegible] termine. Il termine [illegible] comprendendo la massima potenza [illegible] incognita, ne indica il grado dell'Equazione, si dice termine primo e quello [illegible] potenza [illegible] sono il 2°, il 3°, il 4to, ec.

Così nell'Equazione x^3 [illegible] $ax^2 + bbx$ [illegible] abc [illegible] il primo termine è x^3, il 2do ax^2, il terzo bbx.

8. Il termine poi $-abc$, che di sole grandezze note si compone [illegible], cioè omogeneo di comparazione.

9 L'Equazione a cui manca qualche termine, dicesi deficiente, e [illegible] ogni [illegible] segnarsi coll'asterisco $*$ o alcuni punti, come $x^4 * * * - a^3b = 0$ dove manca il 2°, il 3°, e 4to termine, ovvero $x^4 \dots - 6x^2 \dots + 5 = 0$, a cui manca il 2do termine, e il 4to.

10 [illegible] numeri, o lettere note, che [illegible] [illegible] termine [illegible] coefficienti de' termini [illegible] se date $x^3 - ax^2 + abx - a^2b = 0$, la [illegible] a è coefficiente del 2do termine ab costituisce il coefficiente del terzo.

11 [illegible] Equazione, [illegible], e l'ultimo termine solamente, si [illegible] come $x^3 + p$ [illegible]

12. Diconsi affette quelle equazioni che hanno tutti, o alcuni termini intermedj.

* Tali Equazioni si distinguono da alcuni in affette o per modo di addizione o sottrazione talvolta sotto il lato [illegible] il quadrato alcuna volta sotto il quadrato e sotto il lato, ec.

Così $x^2 + ax = bb$ chiamano equazione affetta per addizione sotto il lato $x^3 - ax^2 + bx = c^3$ equazione affetta per sottrazione sotto il quadrato, e per addizione sotto il lato*.

13 In ogni Equazione ordinata, la quantità che sostituita invece dell'incognita fa svanire tutti i termini e li riduce al zero dicesi radice dell'Equazione.

Così nell'Equazione $x - a = 0$, la radice è a; imperocchè $a - a = 0$.

La radice di un'equazione può ancora essere una quantità complessa, come nell'Equazione $x - a + b - c = 0$ se il trinomio $-a + b - c$ sia uguale ad x.

[illegible] più quantità sostituite in luogo dell'incognita possono [illegible] i termini può ancora, possono essere le radici di una medesima Equazione.

Così $x^2 - 8x + 12 = 0$ vi sono due radici 2, e 6, perchè l'una, e l'altra sostituita invece di x riduce i termini al zero.

Il numero [illegible] delle radici è [illegible] analogo al [illegible] grado di potenza [illegible] dell'incognita [illegible]; ma Equazione quadratica se ne avranno 2 radici nella cubica 3, nella biquadratica 4. [illegible]

[illegible] un probl. può ammettere più [illegible] soluzioni, non

te per le radici nell'immaginarie che lo sono anch'esse nel problema semplice (parlando di determinati) e una sola soluzione, non essendo l'Equazione costituita che una sola radice, [illegible] indeterminati.

14 Quantunque poi tanto le radici [illegible] o negative [illegible] si dicono positive quando il valore dell'incognita è una quantità [illegible] si dicono negative se il valore dell'incognita è una quantità negativa.

15° Le radici poi di un'Equazione ottenute positive o negative possono essere o razionali come in $x-a=0$, o irrazionali, come in $x-\sqrt{ab}=0$, ovvero miste, come in $x-a+\sqrt{ab}=0$, e questa specie di radici si [illegible] reali.

16° Che se il valore dell'incognita sia una quantità immaginaria, come $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-b}$, $\sqrt[6]{ab}$ (di cui si è fatto [illegible] nella prima parte) la radice dell'Equazione dicesi [illegible] quale dicesi Misto-immaginaria se si compone d'una quantità reale, e d'una immaginaria come $2+\sqrt{-1}$ ec.

[illegible] qualche [illegible] il cui quadrato aggiunto al quadruplo di essa quantità + 10 faccia zero.

Chiamando x la detta quantità, si ha l'equazione $x^2+4x+10=0$ di cui indagando le radici, sarà l'una $\sqrt{-6}-2$ l'altra $-\sqrt{-6}-2$.

La radice immaginaria, e cioè impossibile, essendo $\sqrt{-6}$, come si è dimostrato nella prima parte inassegnabile.

17 un'Equazione consiste nell'espressione de' suoi coefficienti, di cui formula della stessa Equazione; e perchè variano i coefficienti secondo che dipendono le radici, si può in tal modo esprimere con maggior semplicità un'Equazione di qualunque grado, prendendo in luogo de' coefficienti le lettere p, q, r, s ec., il che si ottiene coll'ordinazione.

Si ordinano poi li termini d'un'Equazione scrivendo l'uno sotto l'altro tutti que' termini che hanno l'incognita innalzata al medesimo grado, indi sostituendo invece de' coefficienti le dette lettere.

Così data l'equazione $x^4+ax^3-cx^3+abx^2-a^2x^2+abcx+a^2bx-a^2c^2+a^2b^2=0$

Ordinandola si avrà
$$\begin{matrix} x^4+ax^3+abx^2+abcx-a^2c^2 \\ -cx^3-a^2x^2+a^2bx+a^2b^2=0 \end{matrix}$$

E sostituendo le predette lettere in luogo de' coefficienti diverrà
$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

Imperocchè ax^3-cx^3, posto $a-c=p$, diverrà $=px^3$; similmente $abx^2-a^2x^2$, posto $ab-a^2=q$ diviene $=qx^2$; e dello stesso modo supponendo $abc+a^2b=r$ ed $a^2b^2-a^2c^2=s$, l'equazione data diverrà $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ la quale è una formula del 4º grado.

È ben vero, però, che le formule del medesimo grado differiscono o per la mancanza de' termini, o per la opposizione de' segni, ad ogni modo con la formula $x^2+px\pm q=0$ possono esprimersi tutte le cose della formula del 2º grado, ovvero anche con questa $x^2+px+q=0$, ma [illegible]

[illegible]

caso mancando il secondo termine, devesi intendere 1° che sia $px = 0$ 2° il segno $+$ assume indifferentemente ancora il segno $-$, che può essere richiesto da ciascuna formula particolare e così delle altre.

Genesi e Proprietà delle Equazioni

Capo II.

18 Teorema, Ogni equazione composta è il prodotto di altrettante equazioni semplici, quanti sono i gradi dell'Equazione medesima.

Se le Equazioni semplici $x - a = 0$

$x - b = 0$

E fra loro si moltiplichino, si avrà l'equazione quadratica

$$\begin{array}{l} xx - ax + ab = 0 \\ \quad\;\; - bx \end{array}$$

Cioè $x^2 - ax - bx + ab = 0$

Se questa di nuovo si moltiplichi per l'equazione semplice $x - c = 0$, risulterà l'equazione cubica

$$\begin{array}{l} x^3 - ax^2 + acx - abc = 0 \\ \quad\;\; - bx^2 + bcx \\ \quad\;\; - cx^2 + abx \end{array}$$

Cioè $x^3 - ax^2 - bx^2 - cx^2 + acx + bcx + abx - abc = 0$

Se questa di nuovo si moltiplichi per $x - d = 0$ si avrà l'equazione Biquadratica

$$\begin{array}{l} x^4 - ax^3 + acx^2 - abcx + abcd = 0 \\ \quad\;\; - bx^3 + bcx^2 - acdx \\ \quad\;\; - cx^3 + abx^2 - bcdx \\ \quad\;\; - dx^3 + adx^2 - abdx \\ \qquad\qquad + bdx^2 \\ \qquad\qquad + cdx^2 \end{array}$$

Ovvero sostituendo la solita lettera invece di coefficienti (17)

sarà $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$

Ecco si vede, che qualunque Equazione composta si forma dalla moltiplicazione di altrettante equazioni semplici, quanti sono i gradi della medesima equazione. Così l'equazione quadratica si forma da due equazioni semplici, la cubica da tre, la biquadratica da quattro ec.

19. Corol. 1° Dunque ogni equazione composta può esser divisa esattamente da ciascuna delle componenti semplici, e diminuirsi d'un grado meno. Così $x^2 - 7x + 12 = 0$ può esser divisa tanto da $x - 3 = 0$, quanto da $x - 4 = 0$, imperocchè da queste è stata prodotta. Similmente l'equazione $x^2 - ax - bx + ab = 0$ può esser divisa dalle due componenti $x - a = 0$; $x - b = 0$, da cui è stata prodotta.

Anzichè avendo note due o più equazioni semplici, potrà sempre l'equazione composta esser divisa per loro prodotto e così di minuirsi di un numero di due o più gradi. Così se nell'equazione $x^4 - 18x^3 + 119x^2 - 364x + 360 = 0$, due delle componenti sono $x - 3 = 0$; $x - 4 = 0$ il cui prodotto è $x^2 - 7x + 12 = 0$ potrà per esso dividersi il medesimo prodotto, e risulterà l'equazione $x^2 - 11x + 30 = 0$. Similmente essendo $x^2 - ax + b = 0$ il prodotto di due componenti dell'equazione $x^3 - ax^2 + bx^2 + bx - abx + b^2 = 0$ potrà questa per esso prodotto dividersi esattamente.

20. Corol. 2° Quindi si raccoglie il metodo onde riconoscere, se qualche quantità sia radice di un'equazione proposta, cioè di formare con essa quantità un'equazione semplice, e con questa dividere l'equazione data. Che se la divide esattamente

sarà

sarà la quantità assunta una di sue vere radici

Così se venga data l'Equazione

$$x^3-12x^2+47x-60=0$$

e vogliasi far prova se 3 sia vera radice, dividasi per x − 3 e ne viene esatta la divisione si conchiude che 3 è vera radice. Parimenti perchè dividendo per x − 4, x − 5 la divisione riesce esatta, saranno 4, 5 due radici della stessa equazione

Nello stesso modo se diasi l'equazione universale

$$\begin{array}{l} x^3-ax^2+acx \\ \quad -bx^2+bcx-abc=0 \\ \quad -cx^2+abx \end{array}$$

potendo esattamente dividersi per x − a, x − b, x − c si conchiude che ciascuna sia vera radice

21. Teorema 2° In qualsivoglia equazione il coefficiente del 2° termine è uguale alla somma di tutte le radici, con segno contrario. Il coefficiente del terzo uguaglia la somma de' prodotti di ciascuna a due a due col proprio segno, il coefficiente del 4to la somma de' prodotti di ciascuna tre a tre con segno contrario, del 5to la somma de' loro prodotti 4 a 4 col proprio segno e così successivamente sino all'ultimo termine ... che è il prodotto di tutte le radici

Difatto se si moltiplichino fra loro quante equazioni semplici si vogliono, come x − a = 0, x − b = 0, x − c = 0, x + d = 0 risulterà l'equazione

$$\begin{array}{l} x^4-ax^3+abx^2-abcx-abcd=0 \\ \quad -bx^3+acx^2+abdx \\ \quad -cx^3+bcx^2+acdx \\ \quad +dx^3-adx^2+bcdx \\ \qquad -bdx^2 \\ \qquad -cdx^2 \end{array}$$

... coefficiente del secondo termine $a+b+c+d$ è l'aggregato di tutte le radici sotto segni contrarj. il coefficiente $ab+ac+bc+ad+bd+cd$ del terzo termine è l'aggregato dei prodotti di ciascuna due a due col proprio segno, e così procedendo sino all'omogeneo che è il prodotto di tutte le radici, come si può provare

22. Corol. Quindi data qualunque equazione composta, come la biquadratica $x^4 - 18x^3 + 119x^2 - 364x + 360 = 0$, di cui si cerchino le radici, il probl. si riduce a ritrovare quattro quantità, la cui somma sia 18, la somma dei prodotti delle binarj 119, dei ternarj 328 e il prodotto di tutte quattro le quantità = all'omogeneo 360

23. Quindi si raccoglie il più metodo generale di estrarre le radici razionali, componenti l'equazione. Imperocchè l'omogeneo 360 essendo il loro prodotto, qualche efficiente dell'omogeneo sarà radice dell'equazione. Si cerchino dunque tutti gli efficienti dell'omogeneo, e si provi quale fra questi sostituito invece dell'incognita nell'equazione, riduce al zero tutti li termini e sarà questo una radice dell'equazione.

Sia per esemp. $x^2 - 7x + 12 = 0$

Gli efficienti dell'omogeneo 12 sono 1, 2, 3, 4, 6, 12. Ora sostituito 1, 2, 6, i termini non svaniscono perciò nessuno di questi può essere radice. Ma sostituito tanto 3, quanto 4 svaniscono tutti i termini, essi sono dunque ambi radici dell'equazione

Generalmente se sia $x^2 - ax - bx + ab = 0$

Perchè gli afficienti dell'omogeneo ab sono a e b, i quali sostituiti nell'equazione fanno svanire i termini, sarà l'uno e l'altro radice dell'equazione.

sostituito a diviene $a^2 - a^2 - ab + ab = 0$

sostituito b $\qquad b^2 - ab - b^2 + ab = 0$

24. Importa dunque conoscere tutti i divisori dell'omogeneo; che per averli, basta dividerlo prima pel minimo suo divisore, e il quoto di nuovo pel minimo, e così successivamente, finchè pervengasi a un quoto indivisibile, e si avranno tutti i primi divisori. Pigliati poi tutti due a due, tre a tre, quattro a quattro ecc., e si avranno i divisori composti.

Così se si cerchino tutti i divisori del numero 140:

I divisori primi sono 1, 2, 2, 5, 7.

I div. detti binarj . . . 4, 10, 14, 35.

Dei ternarj . . . 20, 28, 70.

Dei quaternarj . . . 140.

Se l'omogeneo sia quantità letterale, come $8mnn$, si opera nello stesso modo, cioè si divida prima per 2, e il quoto $4mnn$ di nuovo per 2, e il quoto $2mnn$ stesso per 2, onde si abbia il quoto mnn. Quindi si divida mnn per m e il quoto nn per n, e avrassi il quoto n, che non è più oltre divisibile.

Sarà i divisori della quantità $8mnn$ i primi sono 1, 2, 2, 2, m, n, n.

I div. dei binarj 4, 2m, 2n . . .

Dei ternarj . . . 8m, 8n.

Dei quaternarj . . . 8mn, 8nn . . .

Dei quinarj . . . 4mnn . . .

Dei senarj . . . 8mnn.

25. Teorema terzo. In ogni equazione composta altrettante volte si succedono i medesimi segni +, ovvero −, quante sono le radici negative, e altrettante volte alternano i segni, quante sono le

radici positive.

La dimostrazione si manifesta dalla costruzione medesima, se si formino delle equazioni composte con più equazioni semplici giusto i teoremi precedenti.

Dunque nell'equazione $x^2-5x+6=0$, in cui due volte alternano i segni, due parimenti sono le radici positive, cioè 2, e 3.

Similmente nell'equazione $x^3-12x^2+47x-60=0$. in cui tre volte alternano i segni, tre parimenti sono le radici positive, cioè 3, 4 5.

Ma nell'equazione $x^2+6x+6=0$ in cui due volte si succede il medesimo segno +, due parimenti sono le radici negative, cioè −2 −3.

E nell'equazione $x^3+12x^2+47x+60=0$ tre volte si succede il medesimo segno +, e tre del pari sono le radici negative, cioè −3, −4, −5.

Nell'equazione poi $x^2+x-6=0$ dove il segno una volta si succede, e varia l'altra si ha una radice positiva, l'altra negativa, cioè 2, e −3.

E nell'equazione $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$ che ha tre variazioni di segni, ed una continuazione col medesimo segno, tre sono le radici positive, 2, 3, 4, ed una negativa −5.

26. Dalle quali cose ne segue la regola, onde conoscere quante siano le radici positive in una data equazione, e quante le radici negative. Così nell'equazione $x^3-3x^2-10x+24=0$, essendo due variazioni di segni da + in −, e da − in +, due saranno le radici positive, e perchè una volta si succede il medesimo

se

segno −, una pure sarà negativa, e così delle altre.

Si eccettua però, se nell'equazione vi sono radici immaginarie, di cui, a suo luogo si darà la regola per conoscerle.

27 Corol. 1° Quindi se si cambino i segni de' termini pari, cioè del 2do, del 4to, 6to ecc. d'un'equazione composta, senza alterarli negli impari, si muteranno le radici positive dell'equazione in radici negative, e viceversa le negative in positive.

Sia l'equazione $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, in cui vi sono le radici positive +2, 3, 4, ed una negativa −5; cambiati i segni nel modo indicato, diverrà l'equazione

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$$

di cui vi sono le radici negative −2, −3, −4, ed una positiva +5.

La ragione si rileva dal metodo indicato di costruire le equazioni composte. [illegible]

28. Corol. 2° Nell'equazione deficiente è necessario, che vi siano delle radici positive e negative eguali, le quali insieme abbiano a distruggere qualche termine.

E dal teorema 20 è manifesto che mancando il secondo termine è necessario, che la somma delle radici negative uguagli la somma delle positive; le quali sono i divisori semplici. Se manca il terzo, i prodotti negativi dei binarj agguaglino i prodotti positivi; se manca il 4to, si elideranno i prodotti de' ternarj, e così di seguito.

Sia l'equazione $x^3 + 0x^2 - 19x + 30 = 0$

le cui radici sono 2, 3, −5; perchè dunque la somma delle radici positive 2 + 3 uguaglia la negativa −5, perciò si distruggono a

vi;

vicenda e quindi che manca il secondo termine

è nell'equazione universale

$$x^3 - ax^2 + abx - abc = 0$$
$$- bx^2 - acx$$
$$+ cx^2 - bcx$$

Ovvero $x^3 - ax^2 - bx^2 + cx^2 + abx - acx - bcx - abc = 0$

Se $c = a + b$ svanirà il secondo termine; se poi $ab = ac + bc$ svanirà il terzo de' binarj, e così degli altri.

29. Corol. 3.zo Potendo poi il termine deficiente avere tanto il segno +, che il segno −, in simili equazioni si consideri prima il detto termine affetto col segno +, indi col segno − e se dell'uno, e dell'altro supposto risultano le medesime radici saranno le radici di quell'equazione, quali con la regola del teorema precedente si saranno ritrovate.

30. Corol. 4.to Nelle equazioni deficienti, per scambiare le radici positive in negative, e viceversa, sarà lo stesso metodo insinuato nel corol. primo.

Sia l'equazione deficiente $x^3 \ldots - px + q = 0$

in cui due sono le radici positive e una negativa, scambiato il segno al 4.to termine q, con mutate ancora il termine deficiente, diverrà $x^3 \ldots - px - q = 0$, in cui le due radici positive saranno si scambiate in negative, e la negativa in positiva.

Delle Radici immaginarie nell'Equazioni

Capo III

31. Per conoscere se siano radici immaginarie nell'Equazio. . . . .
. . . . ni. Altrimenti non sarebbe la contradizione, ovvero

ripugnanza di condizione, che sempre in simili equazioni s' involge, nè appartenebbero reali coefficienti.

Così se abbiam l' equazione $x^2-10x+100=0$, due sono le radici immaginarie, cioè $5+\sqrt{-75}$, e $5-\sqrt{-75}$ le quali fra loro moltiplicate danno l' equazione proposta.

Così dalle altre se il grado a cui ascende la massima incognita è pari potrà contenere [illegible] radici immaginarie, e quindi sarà [illegible] impossibile.

Altre l' equazione, il cui grado è numero impari, dee sempre contenere una radice reale per lo meno [illegible], ma [illegible] tale equazione [illegible] sarà sempre possibile.

II. Dove s' involgono radici immaginarie, quelle ancor debbono, o ambedue pure, o ambe miste; quando sono pure è necessario che dall' una, e dall' altra si distingua la medesima quantità immaginaria, dall' una cioè positivamente, e negativamente dall' altra

Così nell' equazione $xx+2=0$, una delle radici immaginarie è $\sqrt{-2}$; l' altra $-\sqrt{-2}$.

Quando poi sono miste è necessario che l' una e l' altra distingua il medesimo numero e la medesima quantità immaginaria. Così se si [illegible] $x=3+\sqrt{-4}$ ed $x=3-\sqrt{-4}$ e si moltiplichino fra loro [illegible] l' equazione $x^2-6x+13=0$

Ma in qualunque altro modo si [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] coefficienti razionali, le radici immaginarie, se pur [illegible] alcuna, avranno siffatte condizioni

32 Per conoscere quante radici immaginarie o reali ci sono in una data equazione, si dà la seguente regola inventata da Gregorio Campbell.

Ai coefficienti dei termini ... di una potenza ... binomio elevato allo stesso grado dell'equazione proposta, si formino tante frazioni, le quali abbiano per numeratore i predetti coefficienti ... coll'unità e ... i rispettivi coefficienti raddoppiati e le frazioni ... si ... termini intermedj dell'equazione data. Che se il quadrato de' coefficienti di qualunque termine moltiplicato nella frazione ... maggiore, che il rettangolo de' coefficienti de' termini da una parte e dall'altra immediatamente adiacenti ... diminuito ... o aumentato de' rettangoli de' coefficienti degli altri termini prossimamente seguenti allora pongasi il segno + sotto lo stesso termine; altrimenti il segno −. Sotto poi il primo, e l'ultimo ...

altrettante saranno le radici immaginarie, quante le mutazioni de' segni; e all'incontro altrettante saranno le radici reali quante le continuazioni de' medesimi segni.

... meglio intendere il ... di questa regola sia l'equazione ... grado

$x^8 \cdots px^7 \cdots qx^6 \cdots rx^5 \cdots sx^4 \cdots tx^3 \cdots Kx^2 \cdots lx \cdots m = 0$

i coefficienti di tutti i termini intermedj della potenza ottava ... binomio sono 8 28 56 70 56, 28 8 onde le frazioni, giusta la regola precedente, saranno $\frac{7}{16}$, $\frac{27}{56}$, $\frac{55}{112}$, $\frac{69}{140}$, $\frac{55}{112}$, $\frac{27}{56}$, $\frac{7}{16}$ le quali sopraiscritte ai termini intermedj della data equazione, si avrà

$$x^8 \cdot \overset{\frac{7}{16}}{p x^7} \ldots \overset{\frac{27}{56}}{q x^6} \ldots \overset{\frac{35}{112}}{r x^5} \ldots \overset{\frac{69}{140}}{s x^4} \cdot \overset{\frac{35}{112}}{t x^3} \ldots \overset{\frac{27}{56}}{k x^2} \ldots \overset{\frac{7}{16}}{l x} \ldots m = 0$$

Ora ella avrà immaginarie tutte le sue radici, e sarà

$1^\circ\ \frac{7p^2}{16} < q;\ 2^\circ\ \frac{27q^2}{56} < pr - s;\ 3^\circ\ \frac{35r^2}{112} < qs - pt + rk;\ 4^\circ\ \frac{69s^2}{140} < rt - qk + pl - m;\ 5^\circ\ \frac{35t^2}{112} < sk - rl + qm.\ 6^\circ\ \frac{27k^2}{56} < tl - sm.\ 7^\circ\ \frac{7l^2}{16} < km$ [illegible] con[illegible] del segno < in > indicano allora che tutte le [illegible] reali e quando variate con maniera continuata [illegible] alcuni segni avranno parte reali e parte immaginarie, giusto la regola sopra descritta.

Prendasi per l'equazione di terzo grado con i coefficienti numerici $x^3 - 5x^2 - 8x - 8 = 0$

I coefficienti de' termini del binomio elevato alla potenza terza sono 3, 3, perciò le frazioni $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$, ovvero $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ [illegible] poste sopra i termini intermedj dell'equazione si avrà

$$x^3 - 5\overset{\frac{1}{3}}{x^2} + 8\overset{\frac{1}{3}}{x} - 8 = 0$$

Fatte le necessarie riduzioni giusto la regola sopra data, e posti sotto i suoi termini [illegible] segni, si avrà

$$x^3 \quad 5\overset{\frac{1}{3}}{x^2} + \overset{\frac{1}{3}}{[illegible] x} \quad 8 = 0$$
$$+ \quad + \quad - \quad +$$

Imperocché il quadrato del coefficiente del 2° termine moltiplicato nella frazione [illegible] $\frac{1}{3}$ di 25, cioè $\frac{25}{3}$ è un prodotto maggiore del rettangolo 1 × 8, fatto de' coefficienti de' termini adiacenti x^3 8x, pongasi il segno + sotto il 2° termine. Alla [illegible] + quadrato del coefficiente del terzo

XIV.

terzo termine moltiplicato nella rispettiva frazione $\frac{1}{3}$ dà $\frac{4}{3}$ prodotto minore del rettangolo $5 \times 8 = 40$ fatto dai coefficienti de' termini adjacenti $-5x^2$ 8, pongasi il segno + sotto il terzo termine; e poichè sotto il primo, e l'ultimo si pone sempre il segno + si è compita l'operazione, dalla quale si conosce che [illegible] radici [illegible] nella data equazione [illegible] vate

[illegible] equazione di settimo grado

$$x^7 - 5x^6 + 15x^5 - 23x^4 + 18x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = 0$$

I coefficienti de' termini del Binomio elevato alla potenza settima sono 7, 21, 35, 35, 21, 7, laonde le frazioni $\frac{6}{14}$, $\frac{20}{42}$, $\frac{34}{70}$, $\frac{34}{70}$, $\frac{20}{42}$, $\frac{6}{14}$, ovvero deprimendo $\frac{3}{7}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{17}{35}$, $\frac{17}{35}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{3}{7}$, le quali [illegible] termini [illegible] dell'equazione data [illegible] no sottoscritti li seguenti segni

	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{17}{35}$	$\frac{17}{35}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{3}{7}$	
x^7	$-5x^6$	$+15x^5$	$-23x^4$	$+18x^3$	$+10x^2$	$-28x$	$+24 = 0$
+	—	+	+	+	+	+	+

[illegible] -zione. Poichè 25 quadrato del coefficiente del 2do termine moltiplicato nella rispettiva frazione $\frac{3}{7}$ dà $\frac{75}{7} = 10\frac{5}{7}$, che è un prodotto minore del rettangolo 1×15, fatto dai coefficienti de' termini adjacenti, si sottoscriva il segno — al 2do termine; e poichè 225 quadrato del coefficiente del 3zo moltiplicato nella rispettiva frazione $\frac{10}{21}$ dà $\frac{2250}{21} = 107\frac{1}{7}$ cioè un prodotto maggiore di 5×23 [illegible] 1×18 rettangolo del 2do e 4to termine [illegible] rettangolo 1×18 del primo e quinto termine [illegible] + sotto il terzo termine [illegible] 529 quadrato del coefficiente del 4to termine moltiplicato nella rispettiva frazione $\frac{17}{35}$ dà $\frac{8993}{35}$ prodotto maggiore di $15 \times 18 - 5 \times 10 + 1 \times 28 =$

$= 248 = 8048$ . . Se i coefficienti di primi termini adjacenti manco il rettangolo de' secondi [illegible] il rettangolo de' rezi, pongasi il segno + sotto il termine 4to; così procedendo troverai di dover sottoscrivere il segno + al quinto e sesto termine, e sotto il settimo parimenti più, come nel seguente esempio si vede.

Donde si dedurrebbe, che due soltanto fossero le radici immaginarie, attese le due mutazioni de' segni e cinque reali, quando le immaginarie sono sei, cioè

$1+\sqrt{-3}$; $1-\sqrt{-3}$, $1+\sqrt{-2}$, $1-\sqrt{-2}$, $1+\sqrt{-1}$, $1-\sqrt{-1}$, e la settima reale, cioè -1.

Perciò la regola di Campbell rettificata su quella di Newton non è universalmente vera. Laonde per conoscere certamente se nella data equazione vi siano radici immaginarie converrà ricorrere alla regola geometrica, come s'aggiungerà a suo luogo.

Della trasformazione

delle Equazioni

Capo IV.

33. Giova, e conviene spesse volte trasformare un'equazione in altra, la quale sia più atta, e più semplice tanto per esaminarla, e ridurla, quanto per risolverla ancora [illegible]

[illegible]

34 Aumentare, o diminuire le radici di una data equazione, per una quantità data

Sia l'equazione $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$
le cui radici sono 2, 3, 4, e debba trasformarsi in altra le
cui radici eccedano le date di 3.

Pongasi $x + 3 = y$, e si avrà $x = y - 3$.

Facciasi poi la sostituzione, moltiplicando [illegible] $y - 3$
in $y - 3$, si avrà $x^3 = y^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0$, indi $-9x^2 = -9y^2 +$
$54y - 81$, moltiplicando 9 coefficiente di $9x^2$ in $y^2 - 6y + 9 = 0$
[illegible] come in figura

$$x^3 = y^3 - 9y^2 + 27y - 27$$
$$-9x^2 = \quad - 9y^2 + 54y - 81$$
$$+26x = \qquad + 26y - 78$$
$$-24 = \qquad\qquad - 24$$

Equaz.e trasfor.a $y^3 - 18y^2 + 107y - 210 = 0$
le cui radici sono 5, 6, 7, però la radice sono aumentate
della data quantità 3 [illegible]

Per diminuirle di una data quantità, sarà lo stesso
metodo sostituito il segno [illegible]

Così si abbia l'equazione $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$
la cui radici sono 3, 4, 5, e debbano diminuirsi [illegible] la
quantità 2.

Si pone $x - 2 = y$, e sarà $x = y + 2$ e fatta la sostituzione
[illegible] si avrà l'equazione trasformata $y^3 - 6y^2$
$+ 11y - 6 = 0$, le cui radici sono, 1, 2, 3.

E universalmente nello stesso modo [illegible]
[illegible] x^3, $px^2 + qx$ [illegible] $r = 0$, [illegible]
[illegible] le radici di qualunque quantità a [illegible]
[illegible] col metodo prescritto [illegible] trasformata [illegible]
[illegible] y^3 [illegible] $3ay^2$ [illegible] $py^2 + 3a^2y + 2apy + qy - a^3 - pa^2 - qa$ [illegible] $= 0$

E diminuendole della predetta quantità a si avrà

$$y^3 + 3ay^2 - py^2 + 3a^2y - 2apy + qy + a^3 - pa^2 + qa - r = 0$$

Ciò che dalla risoluzione universale di questo problema si può raccogliere un metodo più spedito per aumentare, o diminuire le radici come segue:

Sia data l'equazione $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ e vogliansi diminuire le radici della quantità a.

I. Ne' termini dell'equazione data in vece di x si ponga a e si avrà per l'ultimo termine della trasformata $a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s$

II. Le parti di questo ultimo termine si moltiplichino nelle dimensioni ovvero nell'esponente che in ciascuna di esse ha la quantità a e dividasi il prodotto per a si avrà per termine penultimo $4a^3 + 3pa^2 + 2qa + r$.

III. Questa quantità si moltiplichi nello stesso modo, e il prodotto dividasi per $2a$; darà $6a^2 + 3pa + q$ per termine antipenultimo, ossia per il terzo.

IV. Questo moltiplicato come sopra e diviso di nuovo per $3a$ darà $4a + p$ per 2do termine, talchè l'equazione trasformata sarà

$$\begin{aligned} y^4 + 4ay^3 + 6a^2y^2 + 4a^3y + a^4 &= 0 \\ + py^3 + 3pay^2 + 3pa^2y + pa^3 & \\ + qy^2 + 2qay + qa^2 & \\ + ry + ra & \\ + s & \end{aligned}$$

Trattandosi di accrescere le radici con questo compendio si divideranno i prodotti 1° per $-a$, 2° per $-2a$, 3° per $3a$ e così successivamente.

Corollarj.

1° Quindi facilmente si conosce, potersi aumentare le radici di modo che qualunque negativa, passi in positiva. Difatto se in una data equazione siano le radici −3 −4 −10 aumentandole della quantità 20, avrà l'equazione trasformata le radici positive 17 16 10. All'opposto possono diminuirsi di maniera che tutte le radici della nuova equazione riescano negative. Come se nell'equazione data siano le radici 17, 16, 10: e si debbano diminuire per 20. Risulterà una nuova equazione le cui radici saranno −3, −4, −10.

2° Quando si aumentano le radici, quelle che erano positive divengono positive maggiori, ma le negative divengono negative minori, e passano qualche volta in positive

3° Viceversa quando si diminuiscono le positive divengono positive minori e passano qualche volta in negative, ma le negative divengono negative maggiori

4° Se l'equazione trasformata ha i segni alterni, e avrà tutte le radici positive è d° indizio che la quantità assunta, con cui sono aumentate le radici è maggiore di qualunque radice negativa della equazione data avendole cambiate in positive se pur di negative ne aveva alcuna.

5to. All'opposto, se l'equazione trasformata avrà tutti i segni simili e avrà le radici tutte negative, sarà d° indizio, che le radici positive dell'equazione data sono

state

stata diminuita d'una quantità di qualunque di esse maggio-
re

Problema 2°

35. Trasformare un'equazione in altra sicchè le radici della prima, e della 2da, prese due a due, facciano una quantità data.

Sia data l'equazione $x^3-6x^2+11x-6=0$

e debba ritrovarsi un'altra tale che le loro radici rispettive, prese due a due facciano 10.

Pongasi $10=x+y$

Trasportando y diviene $x=10-y$

Perciò
$$x^3 = 1000-300y+30y^2-y^3$$
$$-6x^2=-600+120y-6y^2$$
$$+11x = 110-11y$$
$$-6=-6$$

Cioè $\quad 504-191y+24y^2-y^3$

E cambiati i segni $y^3-24y^2+191y-504=0$

Equazione cercata le cui radici sono 9, 8, 7 e le radici della data sono 1, 2, 3 le quali prese rispettivamente due a due faranno appunto 10, quantità proposta.

Universalmente

Sia l'equazione $x^3-px^2+qx-r=0$

si debba ritrovarsi un'altra equazione le cui radici corrispondenti prese due a due facciano la quantità a

Sarà $a=x+y$ trasportando y risulta $x=a-y$

quan-

Laonde $x^3 = \quad a^3 - 3a^2y + 3ay^2 - y^3$

$-px^2 = -pa^2 + 2apy - py^2$

$+qx = +qa - qy$

$-r = \quad -r$

cioè combinati i segni $y^3 - 3ay^2 + 3a^2y - a^3$

$\quad py^2 - 2pay + pa^2 = 0$

$\quad + qy - qa$

$\quad + r$

e.° $y^3 - 3ay^2 + py^2 + 3a^2y - 2apy + qy - a^3 + ap^2 - qa + r = 0$

35. Coroll. primo. Essendo $a = x + y$ riportando si sarà $y = a - x$, perciò se sia la quantità a maggiore di qualunque radice positiva, sarà y sempre positiva, onde risulterà un equazione, le cui radici saranno sempre positive, come di fatto vedesi nell'equazione precedente

37. Coroll. 2do. Se la quantità a sia maggiore di qualunque coefficiente negativo dell'equazione data, saranno nella nuova equazione tutte le radici positive, come vedesi nella precitata equazione nella quale di fatto vengono tutti segni alterni, ed però tutte le radici positive.

38. Coroll. 3zo. Data dunque un equazione alla potrà sempre trasformarsi in altra le cui radici siano tutte positive se il massimo coefficiente negativo si accrescerà dall'unità e ciò senso agguagliasi la somma della radice

Così se abbiasi $x^2 + x - 6 = 0$

E debba trasformarsi in altra equazione, le cui radici siano tutte positive si faccia $7 - y = x$

E diverrà $y^2 - 15y + 50 = 0$

Parimenti se sia $x^3 - 5x^2 - 44x - 60 = 0$

Si fac.

Si faccia $61 + y = x$

e si avrà la nuova equazione

$$y^3 - 178y^2 + 10509y - 205632 = 0$$

Problema 3°

39. Moltiplicare e dividere le radici di una equazione data per una data quantità.

Sia l'equazione $x^2 + 3x + 2 = 0$ le cui radici sono $-1, -2$ e si debba trasformare in altra le cui radici riescano quadruple

Si faccia $4x = y$

sarà dividendo $x = \frac{y}{4}$ ed $x^2 = \frac{y^2}{16}$

E fatta la sostituzione sarà

$$x^2 = \frac{y^2}{16}$$
$$+3x = \frac{3y}{4}$$
$$+2 = 2$$

cioè $\frac{y^2}{16} + \frac{3y}{4} + 2 = 0$

Cioè levati i divisori si riducendo $y^2 + 12y + 32 = 0$

le cui radici sono $-4, -8$ e sono quadruple delle date

Altro Esempio

Sia $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, le cui radici sono 2, 3, 4 e debba trasformarsi in altra le cui radici siano doppie

Pongasi $2x = y$, e sarà $x = \frac{y}{2}$

E fatta la sostituzione

$$x^3 = \frac{y^3}{8}$$
$$-9x^2 = \frac{9y^2}{4}$$
$$+26x = \frac{26y}{2}$$
$$24 = 24$$

cioè

Cioè $\frac{y^3}{8} - \frac{9y^2}{4} + \frac{26y}{2} - 24 = 0$

Ovvero levati i divisori:

$$y^3 - 18y^2 + 104y - 192 = 0$$

equazione trasformata le cui radici sono doppie cioè 4 6 8

Universalmente

da l'equazione $x^3 - px^2 + qx - r = 0$

si faccia $ax = y$; e diviene $x = \frac{y}{a}$

sarà dunque l'equazione trasformata

$$\frac{y^3}{a^3} - \frac{py^2}{a^2} + \frac{qy}{a} - r = 0$$

Ovvero $y^3 - apy^2 + a^2qy - a^3r = 0$

40 Corollario Quindi si raccoglie che, per moltiplicare le radici di un'equazione per una data quantità a, basta cambiare l'incognita x in y nel moltiplicare il primo termine, cioè potenza nulla, il secondo per a, il terzo per a^2, il 4to per a^3 ec.

Così se dassi l'equazione $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6x + 4 = 0$ per trasformarla in altra le cui radici siano decuple, si moltiplichino i rispettivi termini per 1, 10, 100, 1000, 10000 e si avrà l'equazione trasformata.

$$y^4 - 40y^3 + 500y^2 - 6000y + 40000 = 0$$

41 Per dividere le radici di un'equazione data per una data quantità, dopo che si è cambiata l'incognita di x in y si procede con ordine contrario

Così se abbiasi $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 6 = 0$ e debba trasformarsi in altra le cui radici siano suddu-
pla

pio

Si ponga $y = \frac{x}{10}$ e dividendo per 10 diviene $10y = x$

Fatta poi la sostituzione come sopra, si avrà l'equazione cercata. Ma più speditamente pel Corol. se si divida per 1, 10, 100, 1000, 10000, e sarà la nuova equazione.

$$\frac{y^4}{1} - \frac{4y^3}{10} + \frac{6y^2}{100} - \frac{4y}{1000} + \frac{6}{10000} = 0$$

42. Scolio. È utile spesse volte questa trasformazione per ridurre una data equazione a forma più semplice.

Così se diasi: $x^3 - 4x^2 + 5x + \frac{1}{8} = 0$

Moltiplicando i termini per 1, 2, 4, 8 si avrà l'equazione: $y^3 - 8y^2 + 20y + 1 = 0$

le cui radici sono doppie delle rispettive radici dell'equazione data

Similmente se diasi $x^3 - 4x^2 + \frac{3x}{16} - 10 = 0$

si moltiplichi per 1, 4, 16, 64 e si avrà l'equazione

$y^3 - 16y^2 + 3y - 640 = 0$ le cui radici sono quadruple

Ne risulta il metodo per levare gli irrazionali

Così se sia $x^2 + x\sqrt{2} - 6 = 0$. Moltiplicando i termini per 1, $\sqrt{2}$, 2 si avrà l'equazione: $y^2 + 2y - 12 = 0$ le cui radici sono alle radici dell'equazione data come $\sqrt{2}$: 1.

Similmente se abbiasi $x^3 - x^2\sqrt{3} + 10x + 3\sqrt{3} = 0$

Moltiplicando i termini per 1, $\sqrt{3}$, 3, $3\sqrt{3}$ si avrà la nuova equazione: $y^3 - 3y^2 + 30y + 27 = 0$

le cui radici sono alle radici dell'equazione data come $\sqrt{3}$: 1

43. Scolio 2° Si può altresì con lo stesso metodo ritrovare le

[illegible]

equazione il cui coefficiente sia minore del coefficiente omologo della equazione proposta

Così sia $x^3 - 40x^2 + 48x - 100 = 0$, e si cerchi una nuova equazione, in cui il terzo termine sia minore del terzo della data;

Poichè 48 è coefficiente del terzo termine, dividasi esattamente pel quadrato 16, si dividano i termini per le termini rispettivi della serie $\div$ 1, 4, 16, 64 e si avrà

$y^3 - 10y^2 + 3y - \frac{100}{64} = 0$ equazione trasformata, le cui radici eguagliano la quarta parte della data

Similmente se sia $x^3 - 60x^2 + 36x - 270 = 0$

e voglia trasformarsi in altra in cui l'omogeneo sia minore del dato, si dividano i termini per $\div$ 1, 3, 9, 27, e sarà la nuova equazione $y^3 - 20y^2 + 4y - 10 = 0$

le cui radici eguagliano la terza parte della data

Problema 4°

44 Trasformare una data equazione in altra, le cui radici moltiplicate nelle radici della data facciano una quantità data

Sia $x^2 - 3x + 2 = 0$, e debba trasformarsi in altra le cui radici moltiplicate in quella producano 6

Pongasi $xy = 6$, e sarà $x = \frac{6}{y}$.

e quindi l'equazione cercata sarà $y^2 - 9y + 18 = 0$

Le radici dell'equazione data sono 1, 2; le radici della nuova equazione sono 3, 6. Moltiplicando dun-
que

per potersi produrre v' come pure 2 in 3

Problema 5°

45. Data un' equazione ritrovarne un' altra le cui radici siano reciproche della prima

Sia l'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$ le cui radici sono 3, 2 e si voglia trasformare in altra che abbia le radici reciproche della data

Pongasi $\frac{1}{x} = y$ si avrà $1 = yx$ e dividendo per y risulta $x = \frac{1}{y}$

Onde si trova $y^2 - \frac{5}{6}y + \frac{1}{6} = 0$ le cui radici sono $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ e sono reciproche delle date 2 e 3

Problema 6°

46. Trasformare un' equazione in altra le cui radici uguaglino la proposta potenza di quella

Sia $x^4 - 6x^2 + 16 = 0$ e debbasi ritrovarne un' altra, le cui radici uguaglino il loro quadrato.

Pongasi $x^2 = y$, fatta la sostituzione si avrà $y^2 - 6y + 10 = 0$.

Sia in secondo luogo $x^6 - 8x^3 + 9 = 0$

E debbasi rinvenirne un' altra che abbia le radici uguali al loro cubo

Si ponga $x^3 = y$, e fatta la sostituzione, si avrà.

$$y^2 - 8y + 9 = 0$$

Problema 7°

47. Togliere i termini medj da una data equazione

Dimostreremo ciò con un' equazione universale

... la l'equazione $x^2 - ax + b = 0$ e detta trasforma... in altra deficiente nel 2.do termine.

Si ponga $x = y + m$ (se l'equazione data avesse ... [illegible] ... sitivo il secondo termine, invece di porre $x = y + m$, si farebbe $x = y - m$; imperocchè non può mancare il termine se non si elidono quantità eguali e contrarie).

Fatta dunque la sostituzione si avrà $y^2 + 2my - ay + mm - am + b = 0$

Dovendo noi togliere il secondo termine, si faccia $2m - a = 0$ e dividendo $m = \frac{a}{2}$ il che sostituito nella nuova equazione, diviene $y^2 + ay - ay + \frac{aa}{4} - \frac{aa}{2} + b = 0$, cioè $y^2 + \frac{aa}{4} - \frac{aa}{2} + b = 0$

Se l'equazione data sia cubica, si avrà $m = \frac{a}{3}$, se biquadratica, $m = \frac{a}{4}$, ec.; cioè, per regola universale:

... il coefficiente del 2.do termine per l'esponente della massima potenza e con tale quantità si diminuiranno le radici trasformandola come sopra.

Nello stesso modo si deduce la regola per levare gli altri termini. Così se abbiamo $x^3 - px^2 + qx - r = 0$

Fatto come sopra $x = y + m$, si avrà

$$\begin{array}{l} y^3 + 3my^2 + 3mmy + m^3 \\ \quad\; - py^2 - 2pmy - pm^2 \\ \quad\quad + qy + qm \\ \quad\quad\quad - r \end{array} = 0$$

... [illegible] ... togliere il terzo termine ... [illegible] ... si avrà per $3m^2 - 2pm + q = 0$

... [illegible] ... $p = 6$, $q = 9$, ... avrà l'equazione $3m^2 - 12m + 9 = 0$, ovvero $m^2 - 4m + 3 = 0$ ... [illegible] ...

che il metodo delle quadratiche esibisce si trova $m = 3$, ovvero $= 1$

Si dica dunque ove $x = y+3$ ovvero $x = y+1$ e si avrà nell'uno e nell'altro caso l'equazione trasformata deficiente nel terzo termine

48. D'onde si raccoglie, che per togliere il 4to termine bisogna risolvere un'equazione cubica, per levare il 5to una biquadratica ecc. così il problema diviene sempre più difficile e per ordinario non si oltrepassa il 2do termine.

49. All'opposto se diasi un'equazione deficiente, e vogliasi trasformarla in altra, la quale abbia tutti i termini, il probl. è facile; e basta, che giusto il probl. primo si trasformi in altra, o aumentando o diminuendo le radici di qualche quantità.

50. Col mezzo di questo processo facendo svanire i termini medj si viene ancora a capo di ritrovare facilmente le radici. Sia per esempio $x^2+4x-8=0$ trasformata in altra di cui $x = y-2$ diverrà $y^2 \dots -12 = 0$ e sarà $y^2 = 12$ e $y = \pm\sqrt{12}$. ma $x = y-2$; dunque $x = -2 \pm \sqrt{12}$

Della Risoluzione Generale
Delle Equazioni Quadratiche
Capo V.

51. Quando alcuni divisori dell'omogeneo o positivamente o negativamente presi e sostituiti in luogo dell'incognita non annullano i termini dell'equazione al zero ciò è indizio che le radici non sono razionali ad altri metodi generali convien ricorrere onde poter ottenere tanto le radici razionali, che irrazionali, e tanto le reali, quanto le immagi...

naria, ciò che ora uguagliavano a un primo della quadra-
tiche

52. Tutte l'equazioni quadratiche affette si riducono a queste quattro forme

I. $x^2 - 2ax + b = 0$

II. $x^2 - 2ax - b = 0$

III. $x^2 + 2ax + b = 0$

IV. $x^2 + 2ax - b = 0$

che per avere le loro radici si fa uso del medesimo metodo

Sia dunque la prima equazione $x^2 - 2ax + b = 0$

E trasportando la quantità b sarà $x^2 - 2ax = -b$

E poichè il quadrato del binomio consta dei quadrati dei suoi due termine e del doppio rettangolo del primo e del secondo, aggiungasi all'uno e all'altro membro il quadrato aa del semi-coefficiente a, e si avrà $x^2 - 2ax + aa = aa - b$

E avendo in conseguenza il primo membro un quadrato perfetto, la cui radice è $x - a$, estratta da una parte e dall'altra la radice quadrata

Si avrà $x - a = \pm\sqrt{aa - b}$

E trasponendo, $x = a \pm \sqrt{aa - b}$

Nello stesso modo si trovano le radici delle altre, cioè a sa-
...

I. $x = a \pm \sqrt{aa - b}$

II. $x = a \pm \sqrt{aa + b}$

III. $x = -a \pm \sqrt{aa - b}$

IV. $x = -a \pm \sqrt{aa + b}$ 52.

52. Corol. 1.° Da queste formule si conosce generalmente se le radici sieno reali o immaginarie razionali, o irrazionali.

Imperocchè se la quantità $aa - b$ nella prima formula sarà un quadrato perfetto allora la radice sarà razionale se poi imperfetto, irrazionale.

Nella stessa formula, inoltre se sia aa maggiore di b, sarà reale la radice, altrimenti immaginaria. Lo stesso s'inferisca della terza formula.

Ma nella 2da e 4ta formula essendo tutta la quantità $aa + b$ positiva le radici delle equazioni a queste due forme corrispondenti, mai saranno immaginarie, ma sempre riusciranno reali.

Così se sia l'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$, la quale si riduce alla prima specie, sarà $2a = 5$ $b = 6$.

Perciò $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{5}{2}$

Ed $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$

Sarà dunque $x = 2$ ovvero 3

Ma se abbiasi $x - 5x + 4 = 0$

Allora $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}$

cioè le radici saranno immaginarie

Sia in secondo luogo l'equazione $x^2 + 5x + 6 = 0$ che è della terza specie, e sarà $2a = 5$ $b = 6$.

Perciò $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}\ 6}$

Onde $x = -2$ ovvero $= -3$ 34

Ma se nella detta equazione invece di [illegible] si ponga [illegible] saranno le radici immaginarie

Sia in terzo luogo $x^2-8x-10=0$ che appartiene alla seconda formula; e sarà $2a=-8$, $b=10$

Perciò $x=4\pm\sqrt{26}$ cioè le radici irrazionali

Ma se nell'omogeneo si sostituisca -20. allora le radici saranno razionali, cioè 10, ovv.° -2.

Sia finalmente in 4.to luogo $x^2+8x-10=0$ che appartiene alla 4.ta formula, e sarà $2a=8$, $b=10$

Perciò $x=-4\pm\sqrt{26}$ cioè le radici saranno irrazionali

Ma se invece di -10 sia l'omogeneo -20 allora diverranno razionali, e saranno 2, ovv.° -10.

53 Corol. 2° Il metodo di risolvere l'equazioni quadratiche conduce talvolta alla risoluzione delle equazioni più alte le quali si riducono poi alla quadratiche.

Sia l'equazione $x^4-5x^2+6=0$

Se si ponga $x^2=y$ sarà l'equaz.e trasformata $y^2-5y+6=0$, le cui radici sono 2 e 3.

Poichè poi si pone $x^2=y$ sarà $x=\pm\sqrt{y}$ Perciò le radici della data equazione saranno $\pm\sqrt{2}$, e $\pm\sqrt{3}$

Similmente se sia $x^6-5x^3+6=0$

Pongasi $x^3=y$ e sarà la nuova equaz.e $y^2-5y+6=0$, la cui radici sono 2, e 3

Sarà dunque $x^3=2$, ovv.° $x^3=3$.

Perciò $x=\sqrt[3]{2}$ ovv.° $x=\sqrt[3]{3}$

E poichè $\sqrt[3]{2}$ ha un triplo valore, come si vedrà a suo luogo, e similmente $\sqrt[3]{3}$, sei radici [illegible] si determineranno nella proposta equazione.

54 Le equazioni poi che alle quadratiche si riducono diconsi

ri

o derivativa dal 2do grado e possono contenersi tutte sotto questa formula generale:

$$x^{2m} + px^m + q = 0$$

Delle Equazioni Cubiche

Capo VI.

Risolvere l'Equazioni Cubiche pure

Problema I.°

§§. Si dicono pure le equazioni cubiche quando mancano del secondo e del terzo termine, e si riducono a due specie

I. $x^3 - p = 0$

II. $x^3 + p = 0$

ciascheduna delle quali si risolve col medesimo metodo

Imperocchè avendo nella prima $x^3 - p = 0$

Trasponendo si avrà $x^3 = p$, e quindi $x = \sqrt[3]{p}$

E dall'altra $x = \sqrt[3]{-p}$

Ma poichè in qualunque equazione cubica si danno tre radici e in tal modo se ne determina una sola, fa d'uopo ritrovare le rimanenti.

Si ponga dunque $p = a^3$, e si avrà $x^3 - a^3 = 0$. Perciò $x = a$. Divisa dunque l'equazione cubica $x^3 - a^3 = 0$ per $x - a$ risulterà l'equazione quadratica $x^2 + ax + a^2 = 0$ la cui radici sono $x = +\sqrt{-\frac{3aa}{4}} - \frac{a}{2}$, ed $x = -\sqrt{-\frac{3aa}{4}} - \frac{a}{2}$, ciascuna delle quali è immaginaria e la prima a è reale.

Nello stesso modo si troverà che le radici dell'altra equazione sono $x = a$; $x = +\sqrt{-\frac{3aa}{4}} + \frac{a}{2}$; ed $x = -\sqrt{-\frac{3aa}{4}} + \frac{a}{2}$ delle quali la prima a è reale, le rimanenti immaginarie

Ecco

Ecco l'operazione

Poichè si ha $x=\sqrt[3]{-p}$ pongasi $-p=-a^3$ e sarà $x^3+a^3=0$.

Perciò $x=a$. Divisa dunque l'equazione x^3+a^3 per $x+a$ risulta l'equazione quadratica $x^2-ax+aa=0$ le cui radici sono $x=+\sqrt{-\frac{3aa}{4}}+\frac{a}{2}$; ed $x=-\sqrt{-\frac{3aa}{4}}+\frac{a}{2}$ come sopra

Pongasi ora $x=1$ di cui si cerchino le radici, e sarà $a=1$

Perciò le tre radici cercate saranno

$x=1$ $x=+\sqrt{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}$ ed $x=-\sqrt{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}$

5°. Risolvere l'equazione cubica deficiente del 2do termine, in cui qualche radice è razionale

Problema 2°

Qualunque equazione cubica del 2do termine deficiente può ridursi a queste quattro specie

I. $x^3+3px+2q=0$

II. $x^3+3px-2q=0$

III. $x^3-3px-2q=0$

IV. $x^3-3px+2q=0$

le quali tuttavia per compendio possono essere ridotte alla sola: $x^3+3px+2q=0$

I Per risolvere questa equazione conviene prima osservare che nell'equazione cubica a cui manca il 2do termine o due radici sono positive e la terza alla loro somma eguale, negativa; o due sono negative, e la terza pa

rimanente eguale alla loro somma positiva

II. Due radici omnino positive o negative, possono essere eguali, o ineguali.

III. O tutte tre sono reali o una soltanto reale e la rimanente immaginaria.

IV. Le reali o sono razionali o irrazionali se reali si devono tutte determinare.

Supponiamo dunque che due radici dell'equaz.e data siano positive e la terza alla loro somma eguale negativa.

Pongasi dunque la prima radice $= a + b$ la 2da $= a - b$ (supponendo a maggiore di b) e sarà la terza $= -2a$ saranno dunque l'equazioni semplici $x - a - b = 0$; $x - a + b = 0$, $x + 2a = 0$, le quali fra loro moltiplicate danno l'equaz.e cubica.

$$A \quad x^3 - 3aax - bbx + 2a^3 - 2ab^2 = 0$$

Siano in 2do luogo due negative e la terza alla loro somma eguale positiva saranno le equazioni componenti $x + a + b = 0$; $x + a - b = 0$; $x - 2a = 0$, le quali fra loro moltiplicate danno l'equazione cubica

$$B. \quad x^3 - 3aax - 2a^3 \\ - bbx + 2ab^2 = 0$$

Deve si qui osservare che nell'una, e nell'altra equazione il terzo termine è sempre negativo; d'onde si può inferire che se darassi un'equaz.e cubica mancante del 2do termine, e il terzo sia o positivo o zero non saranno tutte

le radici reali; ma una soltanto reale, e le due rimanenti immaginarie

Se i coefficienti dell'equazione si riparagonino co' corrispondenti dell'equaz.e generale formata $x^3 - 3px + 2q = 0$

avremo* $3p = 3aa + bb$ e $2q = 2a^3 - 2ab^2$ * Scambiati i segni

laonde $p = aa + \frac{bb}{3}$ e $q = a^3 - ab^2$.

Alzando dunque la prima al cubo si avrà

$$p^3 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + \frac{b^6}{27}$$, per gli elementi del cubo

e la seconda al quadrato

$$q^2 = a^6 - 2a^4b^2 + a^2b^4$$

Dunque sottraendo questa da quella

$$p^3 - q^2 = 3a^4b^2 + 2a^2b^4 + \frac{b^6}{27}$$

la qual equazione trovasi ancora dall'equazione B. 8°

onde si hanno le seguenti osservazioni

1° Dunque che nella la radici sono reali e inequali fra loro come si è supposto nella costruzione e allora il 2do membro della equaz.e sarà sempre positivo (quantunque nel nostro fatto a è maggiore di b). Laonde ancora $p^3 - q^2$ sarà sempre positiva, cioè il cubo della terza parte del coefficiente del terzo termine sarà maggiore del quadrato della metà dell'omogeneo.

2° Dunque se p^3 è minore di q^2 non saranno tutte reali le radici; ma due saranno immaginarie.

3° Che se si suppongano uguali due radici allora la quantità b diviene zero, perciò il 2do membro dell'equaz.e diviene ancor esso zero

cioè

Sarà dunque $p^3 - q^2 = 0$; e risulta $p^3 = q^2$

Se dunque in qualche equazione cubica, a cui manca il 2º termine, sia $p^3 = q^2$ saranno in essa due radici eguali

Poste due radici eguali

trovare questa radice

S> Quando si pongono eguali le radici sarà $b = 0$

quindi i coefficienti sono $3aa = 3p$; ed $a^3 = q$

Sarà dunque $a^2 = p$

E dividendo $a^3 = q$ per $a^2 = p$

diviene $\frac{a^3}{a^2} = \frac{q}{p} = a$

Quindi per avere una delle radici eguali si manifesta la seguente regola: Dividasi la metà dell'omogeneo per la terza parte dei coefficiente. Così se sia $x^3 - 12x + 16 = 0$. Dividendo 8 metà dell'omogeneo per 4 terza parte del coefficiente del terzo termine, risulta 2 per una delle radici eguali.

Poste tutte le tre radici ineguali di cui

niuna sia razionale trovare una radice

I Se da [illegible] $4aa$ quadrato della radice $2a$ (che deve uguagliare la somma delle due rimanenti) sottraggasi il coefficiente $3a^2 + b^2$ diviene il residuo $a^2 - b^2$. Ma se per questo residuo dividasi l'omogeneo $2a^3 - 2ab^2$; risulta $2a$ che è una delle tre radici ineguali

II. Di nuovo se $a^2 + 2ab + b^2$, quadrato della radice $a + b$ sottraggasi dal coefficiente $3a^2 + b^2$ diviene il residuo $2aa + 2ab$ Alla se per questo residuo si divida l'omogeneo $2a^3 - 2ab^2$ risulta $a - b$, che è un'altra delle radici

-y'

D'onde seguono due regole diverse per trovare la radice se pur vi siano alcuna razionale.

Reg. 1.a Il coefficiente del terzo termine sottraggasi da un qualche suo quadrato maggiore, e se il residuo misura l'omogeneo, il quoto darà una delle radici ricercate.

Reg. 2.a Dal coefficiente del terzo termine sottraggasi un qualche quadrato minore, e se il residuo misura l'omogeneo il quoto sarà una delle radici ricercate.

Il che ora deesi dichiarare con alcuni esempj.

Sia in primo $x^3 - 7x + 6 = 0$

E poichè in questo caso p^3 è maggiore di q^2 cioè il cubo della terza parte di 7 è mag.e di 9, quadrato della metà dell'omogeneo 6, saranno tutte le radici reali ed inuguali, e perchè l'omogeneo è positivo, saranno due le radici positive ed una negativa.

Se or per la 1.a reg. dal quad.to 9 sottraggasi il coefficiente 7, e per residuo 2 si divida l'omogeneo 6 sarà il quoto 3; sarà dunque -3 la radice negativa.

Che se da 7 sottraggasi per la reg. 2.a il quad.to 4 e pel residuo 3 si divida l'omogeneo 6 il quoto 2 sarà una delle radici positive, laonde poichè -3 dee agguagliare la somma delle altre due positive sarà la terza $= 1$.

Sia in 2.do luogo $x^3 - 19x + 30 = 0$

E poichè p^3 è mag.e di q^2 saranno tutte le radici reali, e inuguali, e due positive con la terza negativa.

sottrag.

Sottraggasi poi per la regola 1.ª 19 da 25 e, nel resto 6. si divida 30, sarà il quoto, cioè la radice negativa; cioè −5

Per la regola 2.ª da 19 sottraggasi il quad.^{to} 9 e, nel resid.^{uo} 10 si divida il 30 e sarà il quoto 3 una delle radici positive minori. Lo stesso si otterrà se da 19 sottraggasi il quadrato 4 e, poi residuo 15. si divida il 30, il quoto 2 sarà l'altra delle radici positive minori.

Ma se da 9 sottraggasi il quad.^{dro} 25, e nel residuo 3 si divida l'omogeneo 30, ne risulta il quoto 10 il quale non è radice: e, perocchè le due minori le quali si trovano per la reg. 2.ª devono uguagliare la mag.^{re} −5. perciò in tal caso conviene ricorrere a qualche altro quadrato, come a 4, ovv.^{o} a 9.

Sia in terzo luogo $x^3 - 15x + 4 = 0$ ...

Sottratto per la reg.^{a} 1.ª 15 dal quad.^{dro} 16, e pel resid.^{uo} 1 diviso l'omogeneo 4 cioè −4 che è la radice negativa. Ora dividendo l'equaz.^{e} cubica per $x + 4$ risulta l'equazione quadratica $x^2 - 4x + 1 = 0$ la quale risolta si trovano le radici $2 \pm \sqrt{3}$. Saranno dunque le radici dell'equaz.^{e} cubica −4; $2 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{3}$.

84.° Scolio. Quando per la reg. 1.ª si cerca la massima radice né risulta esatto il divisore dell'omogeneo è d'indizio che la massima radice è irrazionale. E se cercasi una delle minori, né sia esatto il quoziente, allora è d'indizio essere irrazionali le due minori ...

Risoluzione dell'equazione Cubica

Primo Metodo

59. Sia l'equazione generale $x^3+3px+2q=0$ a cui si si[ano] tolte [illegible], che mancano del 2do termine.

Si faccia $x=y+a$, e si avrà

$$x^3=y^3+3ay^2+3aay+a^3$$

Pongasi $3ay^2+3aay=3px$

E diverrà $ay^2+aay=px$

E poichè dall'ipotesi si ha $x=y+a$

Sarà pure $ay^2+aay=axy$

Dunque $axy=px$

E dividendo per x risulta $a=\frac{p}{y}$

[illegible] $x=y+\frac{p}{y}=\frac{yy+p}{y}$

Sarà $x^3=\frac{y^6+3py^4+3ppy^2+p^3}{y^3}$

Si faccia $\frac{3py^4+3ppy^2}{y^3}=2q$

Diverrà $3py^4+3ppy^2=2qy^3$

Perciò [illegible] avendo $y^6+2qy^3=p^3$

la qual equazione è [illegible] [illegible], e risolta si ha $y^3=-q\pm\sqrt{q+p^3}$

Ed estratta la radice cubica $y=\sqrt[3]{-q+\sqrt{qq+p^3}}$

[illegible]

Canone $x = \sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}} + \frac{p}{\sqrt[3]{-q+\sqrt{qq+p^3}}}$

il qual canone è generale, per [illegible] dunque equazione cubica, in cui manca il secondo termine.

Sia [illegible] x^3 [illegible] $+ 24x +$ [illegible] $= 0$

di cui si vuole estrarre la radice

Sarà $3p = 24$, $2q = 8$, e $p = 8$, $q = 4$.

Perciò $x = \sqrt[3]{-4+\sqrt{528}} + \frac{8}{\sqrt[3]{-4+\sqrt{528}}}$.

Sia in secondo luogo $x^3 - 9x + 10 = 0$

sarà dunque $p = -3$; $q = 5$.

E dovrai $x = \sqrt{-5+\sqrt{5'2}} + \frac{[illegible]\ 10}{\sqrt[3]{-5+\sqrt{5'2}}}$

Questo metodo [illegible] gli Arabi e gli Italiani.

Secondo Metodo

Sia l'equazione universale $x^3 - 3px$ [illegible]

si ponga $x = a + b$

Sarà $x^3 = a^3 + 3aab + 3abb + b^3$

Ovvero $x^3 = a^3 + 3abx + b^3$

Dunque $x^3 - 3abx - a^3 - b^3$

la quale [illegible] della stessa forma che la proposta.

Comparando dunque i coefficienti

Avremo [illegible] $p = ab$

In secondo luogo $2q = a^3 + b^3$

Perciò $2qa^3 =$ [illegible] $a^6 + a^3b^3$ [illegible] $^6 + p^3$

Sarà

Sarà dunque l'equazione a^6 [redacted] $2qa^3 + p^3 = 0$.

la quale [illegible] del 2do grado e perchè [illegible] risolvere, [illegible]

$$a^3 = q + \sqrt{qq - p^3}$$

Laonde estratta la radice

$$a = \sqrt[3]{q + \sqrt{qq - p^3}}$$

[illegible] essendo $2q = a^3 + b^3$

Sarà $b^3 = 2q - a^3$

Cioè $b^3 = q - \sqrt{qq - p^3}$

E in conseguenza $b = \sqrt[3]{q - \sqrt{qq - p^3}}$

Essendo $x = a + b$

Sarà ancora $x = \sqrt[3]{q + \sqrt{qq - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{qq - p^3}}$.

il quale [illegible] è generale [illegible] qualunque equazione [illegible] mancante del 2. [illegible] * [illegible]

Ma poichè qualunque radice cubica di qualsia quantità [illegible] tre diverse [illegible] la radice cubica di m^3 ovvero $1 \times m^3$ è triplice; cioè $1 \times m$; $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times m$, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times m$.

Perciò triplice sarà il valore della quantità a, cioè:

$$a = \sqrt[3]{q + \sqrt{qq - p^3}}$$

$$a = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{q + \sqrt{qq - p^3}}$$

---

* Qui [illegible] riserva [illegible] pagine di questo [illegible] giusta il Comp. del Ab. de la Caille.

$$a = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{q+\sqrt{qq-p^3}}$$

Triplice similmente sarà il valore di b, cioè

$$b = \sqrt[3]{q-\sqrt{qq-p^3}}$$

$$b = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{q-\sqrt{qq-p^3}}$$

$$b = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{q-\sqrt{qq-p^3}}$$

E poichè $x = a+b$, sarà pure pel triplice valore:

$$x = \sqrt[3]{q+\sqrt{qq-p^3}} + \sqrt[3]{q-\sqrt{qq-p^3}} \quad A$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{q+\sqrt{qq-p^3}} \; \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{q-\sqrt{qq-p^3}} \quad B$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{q+\sqrt{qq-p^3}} - \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{q-\sqrt{qq-p^3}} \quad C$$

i quali canoni sono generali per esprimere tutte le radici di qualunque equazione cubica mancante del secondo termine.

Sia per esemp. $x^3 - 12x - 18 = 0$

di cui si debbano cercare le radici. Paragonati i coefficienti sarà $p = 4$; $q = 9$; sarà dunque

$$x = \sqrt[3]{9+\sqrt{+17}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{17}} \; \ldots \; A$$

Nello stesso modo, per altri due canoni B. C si dedurranno le rimanenti.

Sia in secondo luogo $x^3 + 12x + 18 = 0$

E sarà $p = -4$, $q = -9$

Dunque $x = \sqrt[3]{-9+\sqrt{17}} + \sqrt[3]{-9-\sqrt{17}}$

Sia in terzo luogo $x^3 + 90x - 16 = 0$

sarà

Sarà $p = -30$, $q = 8$. Dunque $x = \sqrt[3]{8+\sqrt{-2636}} +$
$+ \sqrt[3]{8-\sqrt{-2636}}$.

60. Scolio. Benchè poi i predetti canoni si estendano esattamente a tutti i casi nulladimeno esprimono ambiguamente le radici, se queste sono tutte reali. Poichè come altrove si è notato, qualora abbian [illegible] 99. sarà dunque $\sqrt{99-p^3}$ una quantità immaginaria e perciò le radici che dal canone converrebbero rappresentarsi, come reali, si rappresentano come immaginarie.

Che se abbiasi l'equazione $x^3 - 7x + 6 = 0$
le cui radici siano $1, 2, -3$ si esprimono dal canone con immaginarie. Essendo dunque $q = -3$, $p = \frac{7}{3}$, saranno le radici

$$x = \sqrt[3]{3+\sqrt{-\tfrac{100}{27}}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{-\tfrac{100}{27}}}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{3+\sqrt{-\tfrac{100}{27}}} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{3-\sqrt{-\tfrac{100}{27}}}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{3+\sqrt{-\tfrac{100}{27}}} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{3-\sqrt{-\tfrac{100}{27}}}$$

Di cui ciascuna espressione sotto forma immaginaria perciò non poco rimarchevole sembra il difetto del canone.

Al qual difetto cercando rimediarvi, più dotti Analisti si sforzarono di trovar il modo di estendere il canone a qualunque caso, e cavando dalla formula immaginaria quantità reali, il che fu fatto per estrazione della radice cu-

tica de' Binomj immaginarj, cioè ora si può pur-
gare.

Sia dunque il binomio immaginario $2+\sqrt{-121}$, da cui si debba estrarre la radice cubica.

Sia quella $a+\sqrt{-b}$, e sarà il di lei cubo

$$a^3-3ab+\sqrt{9a^4b}+\sqrt{-b^3}=2+\sqrt{-121}$$

Uguagliando la parte razionale del primo membro alla parte razionale del altro, e così l'irrazionale del primo all'irrazionale del 2do, sarà

$$a^3-3ab=2$$

$$\text{E}\quad \sqrt{9a^4b}+\sqrt{-b^3}=\sqrt{-121}$$

Quadrando poi l'una, e l'altra di queste equazioni diverranno:

$$a^6-6a^4b+9a^2b^2=4$$

$$9a^4b-6a^2b^2+b^3=121$$

E aggiugnendo l'una all'altra

$$a^6+3a^4b+3a^2b^2+b^3=125$$

Ed essendo l'uno, e l'altro membro cubo perfetto, estratta d'ambe le parti la radice cubica, sarà

$$a^2+b=5$$

Laonde risulta $b=5-a^2$

Essendo poi $a^3-3ab=2$ B

sostituendo in questa $5-a^2$ in luogo di b

Diviene $4a^3-15a=2$, cioè $a^3-\frac{15a}{4}-\frac{2}{4}=0$

Posto $a=\frac{y}{4}$, si trasforma in $y^3-60y-32=0$, e sottraen-
do [illegible] 4 divid.° 32, risulta $8=y$.

[illegible]

Dunque $\frac{8}{4}=2$, radice cercata. Dunque $b=1$.

Perciò tutta la radice cercata sarà $2+\sqrt{-1}$.

Similmente se sia un altro binomio immaginario $2-\sqrt{-121}$ si troverà esser la di lui radice cubica $2-\sqrt{-1}$

Laonde se abbiasi dal Canone

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

si potrà con questo metodo spiegare il valore della radice per una quantità razionale, e sarà

$$x = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4.$$

Sia ora dal Canone

$$x=\sqrt[3]{-3-\sqrt{-\frac{100}{27}}}+\sqrt[3]{-3+\sqrt{-\frac{100}{27}}}$$

Se ne estragga la radice cubica dall'uno, e dall'altro binomio sordo, e la loro somma sarà la radice cercata.

Si faccia dunque $-a-\sqrt{-b}=\sqrt[3]{-3-\sqrt{-\frac{100}{27}}}$, cioè s'intenda $-a=-3$, $a-\sqrt{-b}=-\sqrt{-\frac{100}{27}}$

E sarà $-a^3+\sqrt{9a^4b}+3ab+\sqrt{-b^3}=-3-\sqrt{-\frac{100}{27}}$

Paragonando la parte razionale alla parte razionale, e l'irrazionale all'irrazionale sarà

$$-a^3+3ab=-3$$

E $\sqrt{9a^4b}+\sqrt{-b^3}=\sqrt{-\frac{100}{27}}$

Quadrando da una parte, e dall'altra

$$-a^6 - 6a^4b + 9a^2b^2 = 7$$

e $-9a^4b + 6a^2b^2 - b^3 = -\frac{400}{27}$

Dalla prima sottraendo la seconda diviene

$$a^6 + 3a^4b + 3a^2b^2 + b^3 = \frac{343}{27}$$

E' estratta da una parte e dall'altra la radice cubica si avrà

$$a^2 + b = \frac{7}{3}$$

Dunque trasponendo $b = \frac{7}{3} - a^2$

Ed essendo $-a^3 + 3ab = -3$

Sostituito in questa il valore di b si

Diviene $4a^3 - 7a - 3 = 0$

Ovvero $a^3 - \frac{7a}{4} - \frac{3}{4} = 0$ la qual equazione fatto $a = \frac{y}{4}$ si trasforma in $y^3 - 28y - 48 = 0$. la cui radice $y = 6$ (per la reg. ...) e però $a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. $b = \frac{1}{12}$.

Quindi l'una parte della radice cercata è

$$-\frac{3}{2} - \sqrt{-\frac{1}{12}}$$

L'altra parte trovata con lo stesso metodo è

$$-\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{1}{12}}$$

la cui somma è $= -3$

61. Corol. Se suppongasi essere $a + \sqrt{b}$ la radice cubica del binomio $q + \sqrt{qq - p^3}$ diverrà più semplice il canone, e le radici diverranno

La prima $2a$, la 2da $-a+\sqrt{-3b}$, la terza $-a-\sqrt{-3b}$.

Esempio primo. Sia $x^3 - 7x - 6 = 0$

sarà $p = \frac{7}{3}$; $q = 3$; perciò il binomio sordo $3+\sqrt{-\frac{100}{27}}$

la cui radice cubica è $-1 + \sqrt{-\frac{4}{3}}$. dunque $a = -1$, $b = -\frac{4}{3}$.

saranno dunque le radici. 1ma -2, 2da 3, 3za -1 eguali a quelle dell'altro binomio sordo.

Che se la radice cubica, giusto la reg. 1a pongasi $\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{1}{12}}$ (impossibile ma ha tre radici) sarà $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{12}$,

e si troveranno le stesse radici.

Esempio 2° Sia $x^3 - 100996x - 12063360 = 0$

Sarà $p = \frac{100996}{3}$; $q = 6031680$

E il binomio sordo $6031680 + \sqrt{-\frac{47887175043136}{27}}$

la cui radice cubica è $183 + \sqrt{-\frac{529}{3}}$

Sarà dunque $a = 183$; $b = -\frac{529}{3}$

dando la radice prima 183. 2da $= -183 + \sqrt{+529} = -160$

terza $= -183 - \sqrt{529} = -206$, levato il segno radicale $\sqrt{-}$.

112. Scolio. Ciò è quanto fu aggiunto dai più dotti algebristi per l'uso perfetto del canone. Dunque rimanendo ma più impegno se con la stessa felicità, con cui determina le quantità razionali dei binomi [illegible] si cercasse ancora le corrispondenti, il che è impossibile. Perciò quantunque a tutti gli altri casi si estenda il canone, pure

quan-

quando nell'equazione si danno tre radici reali irraziona;
li manca il canone, e dicesi il caso irresoluto.

Delle Equazioni Biquadratiche

Capo VII.

Risolvere l'equazione Biquadratica

63. La risoluzione di simili equazioni si riduce al; la risoluzione della cubica, secondo il metodo di Car; tesio.

Sia l'equazione Generale

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

la quale universalmente rappresenti tutte le Biqua; dratiche deficienti del 2do termine.

Si concepisca generarsi questa dalle due equa; zioni

$$x^2 + ax + b = 0 \quad M$$

$$x^2 - ax + c = 0 \quad N$$, ...

Se si moltiplichino fra loro, risulta l'equazione

$$x^4 - aax^2 - abx + bc = 0$$
$$+ bx^2 + acx$$
$$+ cx^2$$

la quale è la medesima, che la proposta.

Comparando dunque i coefficienti, avremo

1mo. $-a^2 + b + c = p$

2do. $-ab + ac = q$

3zo. $+bc = r$

Dalla

Nella prima $b+c=a^2+p$, e moltiplicando dall'una parte, e dall'altra per a

Diviene $ab+ac=a^3+ap$

Ma per la 2da si ha $ac-ab=q$

Dunque aggiungendo queste due equazioni

Sarà $2ac=a^3+ap+q$

e sottraendo l'una dall'altra $2ab=a^3+ap-q$

E moltiplicate fra loro queste due equazioni

Si avrà $4a^2bc=a^2p^2+2pa^4+a^6-q^2$ [illegible]

e come $bc=r$, diverrà finalmente

$$4a^2r=a^2p^2+2pa^4+a^6-q^2$$

Cioè $a^6+2pa^4+p^2a^2-4ra^2-q^2=0$

la qual equazione è derivativa della cub. [illegible]

Risolta dunque questa equazione, si avrà il valore di a, il quale determinato si troverà ancora il valore di b e di c.

Imperocchè essendo $-a^2+b+c=p$

Sarà $b+c=a^2+p$ [illegible]

moltiplicando per a, $ab+ac=a^3+ap$

Ma si ha ancora $ac-ab=q$

Dunque aggiungendo queste due equazioni

Diviene $2ac=a^3+ap+q$,

E sottraendole $2ab=a^3+ap-q$

quindi

Laonde dalla prima di queste si ha $c = \frac{a^3 + ap + q}{2a}$

Dall'altra si deduce $b = \frac{a^3 + ap - q}{2a}$

Ci verranno dunque date le equazioni componenti, le cui radici saranno le medesime, che le radici dell'equazione proposta.

Le radici dell'equazioni ott. ... sono

La prima $+\sqrt{\frac{aa}{4} - b} - \frac{a}{2}$

La 2da $-\sqrt{\frac{aa}{4} - b} - \frac{a}{2}$

La terza $+\sqrt{\frac{aa}{4} - c} + \frac{a}{2}$

La 4ta $-\sqrt{\frac{aa}{4} - c} + \frac{a}{2}$

Importa poi come si è detto sopra determinare la quantità a.

Esempio 1mo.

Sia l'equazione $x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$

Sarà dunque $p = -12$, $q = 12$, $r = -3$

... sostituiti ... equazione ... derivativa dalla cubica

Si avrà $a^6 - 24a^4 + 156a^2 - 144 = 0$

... risponde all'equazione data in cui trovasi $a^2 = 12$ e perciò $a = \sqrt{12}$ e trovati i rimanenti valori giusto ... precedenti, si avrà $b = \sqrt{3}$, $c = -$ ...

...

saranno dunque le equazioni componenti

$$x^2 + x\sqrt{12} - \sqrt{3} = 0$$

$$x^2 - x\sqrt{12} - \sqrt{3} = 0$$

Le radici della prima equazione sono

$$+\sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt{3}\,;\quad -\sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

e le radici della 2da

$$+\sqrt{3-\sqrt{3}} + \sqrt{3}\,;\quad -\sqrt{3-\sqrt{3}} - \sqrt{3}$$

Esempio 2do.

Sia $x^4 - 86x^2 + 600x - 851 = 0$

Si avrà la cubica corrispondente giusta la formula generale $a^6 - 172a^4 + 10400a^2 - 360000 = 0$

in cui $a^2 = 100$, e però $a = 10$

Sarà dunque $b = -23$, $c = 37$

Onde saranno le equazioni componenti

$$x^2 + 10x - 23 = 0$$

$$x^2 - 10x + 37 = 0$$

Le radici della prima sono $+\sqrt{48} - 5$, $-\sqrt{48} - 5$

Le radici della 2da $5 + \sqrt{-12}$, $5 - \sqrt{-12}$

la medesima cioè, che ha due radici reali e due immaginarie.

Annotazione

Questo 2do esempio è facile, ma [illegible] marca [illegible]

Esam

Equazione data $x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$

Sarà dunque come si è dimostrato $p = -12$, $q = 12$, $r = -3$, i quali valori sostituiti nell'equazione generale

$$a^6 + 2pa^4 + p^2a^2 - q^2 = 0$$
$$\qquad\qquad - 4ra^2$$

risulta $a^6 - 24a^4 + 156a^2 - 144 = 0$ [illegible] da all'equazione data un comodo **derivativa della cubica**, per togliere il secondo termine si ponga $a^2 = y + 8$ (essendo la quantità [illegible] coefficiente 24 [illegible] 3 **metà dell'esponente** 6), e deriverà $y^3 - 36y + 40 = 0$ la quale risolta giusta il canone

$$y = \sqrt[3]{q + \sqrt{qq - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{qq - p^3}}$$

Sarà $p = -12$, $q = -40$, si avrà $y = \sqrt[3]{-40 + \sqrt{-128}}$ $+ \sqrt[3]{-40 - \sqrt{-128}}$.

Pongasi il binomio cubo $-a - \sqrt{-b} = \sqrt[3]{-40 - \sqrt{-128}}$. Innalzando al cubo si avrà $-a^3 + \sqrt{-9a^4b} + 3ab + \sqrt{-b^3}$ $= -40 - \sqrt{-128}$. Dunque paragonando la parte razionale alla razionale, e l'irrazionale all'irrazionale si avrà: $-a^3 + 3ab = -40$

e $\sqrt{-9a^4b} + \sqrt{-b^3} = -\sqrt{-128}$:

Quadrando queste due equazioni si avranno

la prima $-a^6 - 6a^4b + 9a^2b^2 = 1600$

E la 2.da $-9a^4b+6a^2b^2-b^3=-128$. [illegible]

Dalla prima sottratta l'altra diviene $a^6+3a^4b+3a^2b^2$ $=1728$. E estratta la radice cubica da una parte, e dall'altra risulta $aa+b=12$.

E trasponendo, si trova $b=12-aa$.

Ma [illegible] $-a^3+3ab=-40$. Sostituendo dunque in questa il valore di b sarà $-a^3+36a-3a^3=-40$, e cambiati i segni etc. $4a^3-36a=40$. E dividendo per 4 si diviene $a^3-9a=10$.

Ora dal coefficiente 9 sottraendo il quadrato 4, e col residuo 5 dividendo l'omogeneo 10 risulta 2 cioè $a=2$; dunque $b=8$.

Perciò la seconda parte della radice cercata nell'equazione $y^3-36y+80=0$ è $+2-\sqrt{-8}$ e l'altra $+2+\sqrt{-8}$, la cui somma è 4; dunque $y=4$; ma $aa=y+8$; perciò $aa=12$, e però $a=\sqrt{12}$. Sostituito questo valore nella formula $b=\frac{a^3+ap-q}{2a}$, diverrà $b=\frac{144+\sqrt{12}\times-12}{2\sqrt{12}}$ (poichè nella data equazione $p=-12$) $-\frac{12}{2\sqrt{12}}=\sqrt{3}$. E così si trova $c=\sqrt{3}$ sostituito il detto valore nell'altra formula $c=\frac{a^3+ap+q}{2a}$.

Segue

Onde l'equazioni componenti saranno

[illegible] $x^2+x\sqrt{12}-\sqrt{3}=0$

[illegible] e l'altra $x^2-x\sqrt{12}-\sqrt{3}=0$ [illegible]

Sostituiti li trovati valori di a, b, c nelle quattro formole radicali $+\sqrt{\frac{aa}{4}-b}-\frac{a}{2}$; $-\sqrt{\frac{aa}{4}-b}-\frac{a}{2}$; $+\sqrt{\frac{aa}{4}-c}+\frac{a}{2}$; $-\sqrt{\frac{aa}{4}-c}+\frac{a}{2}$

saranno le radici della prima equaz. componente $+\sqrt{3+\sqrt{3}}+\sqrt{3}$; $-\sqrt{3+\sqrt{3}}+\sqrt{3}$ E dell'altra componente $+\sqrt{3-\sqrt{3}}-\sqrt{3}$; $-\sqrt{3-\sqrt{3}}-\sqrt{3}$; e saranno le radici dell'equazione data.

54. Corollario. Quindi si raccoglie 1°. che se diasi un'equazione biquadratica, avente il secondo termine, e trovasi ridotta a qui equazione di esso termine deficiente [illegible] sebbene non trasformarsi [illegible] lunghe equazioni, essendo tuttavia più composte, meglio sarà far uso del più semplice

2° Se la quantità a risulta razionale saranno ancora b e c razionali. Perciò potrà l'equazione biquadratica ridursi alla quadratica e [illegible] ritroveranno le di lui radici con un radicale quad.co Altrimenti se a diviene irrazionale, allora non saranno le radici [illegible] termini della radice cubica.

3.° Se l'equazione biquadratica oltre al secondo termine manchi ancora del 4.to posto, in tal caso considerarsi come derivativa del secondo grado, e risolversi giusto il metodo delle quadratiche.

Così se diasi $x^4 \dots + qx^2 \dots - r = 0$

Ponendo $z = x^2$, si diverrà l'equazione $z^2 + qz - r = 0$

le cui radici saranno $+\sqrt{r + \frac{qq}{4}} - \frac{q}{2}$

e $-\sqrt{r + \frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}$

Ed essendo $x = \pm\sqrt{z}$, saranno le radici cercate $\pm$

$\sqrt{-\sqrt{r+\frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}}$ e $\pm\sqrt{\sqrt{r+\frac{q^2}{4}} - \frac{q}{2}}$

4.° Se finalmente manchi di tutti i termini intermedj, allora dicesi pura e facilmente si risolve per l'estrazione della radice biquadratica.

Così se sia $x^4 + q = 0$

Diverrà $x^4 = -q$ perciò $x^2 = \pm\sqrt{-q}$

Ed $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-q}}$

65. Scolio. Finalmente si dee avvertire, che se l'equazione biquadratica abbia tutte le radici reali ancora nella cubica corrispondente saranno tutte le radici reali, e però s'incorre nel caso irreducibile

Che se ella abbia due radici reali, e due immaginarie, saranno pure due immaginarie nella cubica corrispondente, la quale però risolversi secondo il canone.

Se poi nella quadratica tutte siano immaginarie diven-

gono

gono tutti reali nella cubica, e di nuovo s'incontra nel caso irreducibile [illegible]

Ma potendo le radici reali, e razionali ottenersi nella cubica, o pel metodo de' divisori, o per estrazione di radice dal binomio sordo, potrà l'equazione biquadratica sempre risolversi esattamente, trovandosi anche ancora tutte le radici reali, o immaginarie. Ma se nella cubica sieno tutte irrazionali; poichè allora nè pel metodo de' divisori, nè per la risoluzione del binomio sordo possono aversi esatte le radici, avviene, che in qual caso approssimate soltanto potranno ottenersi le radici dell'equazione proposta.

Metodo generale
per risolvere tutte le alte Equazioni.

Capo VIII.

66. Il metodo generale consiste nell'assumere delle Equazioni semplici, le cui radici sieno della medesima specie, che le radici dell'Equazione proposta, e l'equazione di tali radici composta si paragoni con la data, onde determinare i coefficienti, dalla quale determinazione risulterà sempre un'equazione di un grado inferiore della proposta [illegible]

Sia per esempio l'equazione generale

$$x^4 + 4px^2 + 4qx + 4r = 0$$

le cui radici sieno $x - a - b = 0$, $x - a + b = 0$ siano

sea

ti, e due $x+a+\sqrt{-cc}=0$, $x+a-\sqrt{-cc}=0$ ognuna di radici immaginarie

Dalla loro moltiplicazione risulterà l'equazione

$$x^4 - 2aax^2 + 2abbx + aaaa$$
$$- bbx^2 - 2accx - aabb$$
$$+ ccx^2 \quad + aacc$$
$$- bbcc$$

la quale sarà la medesima che la proposta

Indi paragonati i coefficienti come sopra n° 63 si avrà

$$a^6 - 2pa^4 + ppa^2 - qq = 0$$
$$- 4r\,a^2$$

Dalla cui risoluzione dipende la risoluzione delle componenti, e da questa la risoluzione della composta.

Col medesimo metodo, se sia un'equazione di quinto grado, in cui una radice reale, e quattro immaginarie, si pongan le radici componenti, e dalla loro moltiplicazione risulterà un'equazione simile, ed eguale, paragonati poi i coefficienti si perverrà finalmente a un'equazione di un grado inferiore, dalla cui risoluzione dipende la risoluzione della data.

Così se diasi un'equazione di sesto grado di cui siano quattro radici immaginarie, e due reali si dovrà comporre un'equazione da quante radici, e paragonati i coefficienti si avrà sempre un'equazione di grado inferiore.

Vi sono ancora degli altri metodi, l'esposizione de' quali

si si consulti altrove, non essendo nostro istituto di esporre tutti i tentativi degli Analitici in tal materia, essendo essi pieni di calcoli involuttissimi, nè rendersi necessario di pervenire con tali metodi all' apice di questa scienza, quando più agevolmente si può risolvere qualunque equazione, o col metodo dei divisori o col metodo dei limiti come ora si deve spiegare.

Dei Limiti.

Capo IX.

67. I limiti nel senso, in cui si prendono, sono certe quantità fra le quali esistono le radici di qualunque equazione.

Osservazione.

Sia $x^4 - 34x^3 + 329x^2 - 1016x + 720 = 0$

le cui radici sono tutte positive, cioè 1. 4. 9. 20.

Se invece di x si sostituisca lo zero, diviene la somma positiva eguale a 720.

E se invece di x sostituiransi qualunque altra quantità tra il zero e la prima radice 1. le somme divengono somme positive le quali gradatamente crescono, e dopo pervenute alla massima somma diminuiscono, finchè sostituita la radice 1, divenga la somma zero.

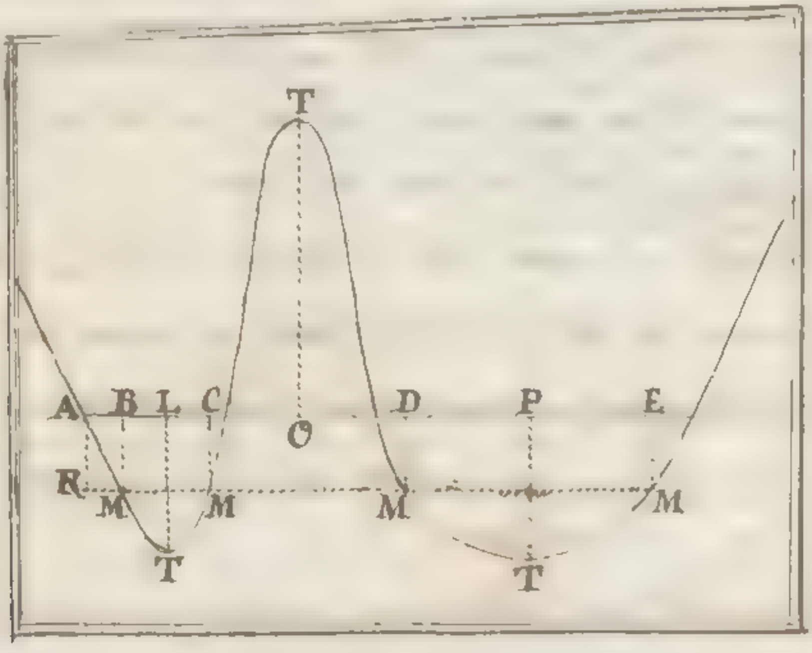
Sostituite poi le quantità intermedie tra la prima, e la seconda radice, le somme divengono negative, le quali crescono fino a un certo limite, ove passato questo gradatamente diminuiscono finchè sostituita la seconda radice 4. ne vien-

vengono zero [illegible]

Sostituite le quantità intermedie fra la seconda e terza radice, le somme di nuovo divengono positive, le quali crescono sino a un certo limite, gradatamente decrescono finchè di nuovo sostituita la terza radice 9. diviene zero.

Sostituita finalmente una quantità maggiore di 9. le somme ritornano negative le quali con la medesima legge prima crescono indi diminuiscono, finchè sostituita la quarta radice 20. diviene zero; dopo chè sostituita qualunque quantità, risulta sempre la somma positiva, e cresce sempre in infinito.

Qualunque quantità tra le quali esiste la radice, sono i limiti della radice medesima. I veri limiti poi diconsi quelli che invece dell'incognita sostituiti danno le massime somme.



Il che per far vedere con gli occhi, sia la figura Geometrica, e sia indeterminatamente l'equazione

$$x^4 - 34x^3 + 329x^2 - 1016x + y = 0$$

la quale si rappresenta per la curva AMIMI, in cui posto il principio in A, saranno AB, AC ec. le Abscisse = x; BM, CM, ec. le Ordinate = y.

Se in vece di y si ponga 720, si determinerà l'equazione e sarà quella che abbiamo proposto. Abbassata dunque l'ordinata AB = 720 e tirata la BM alla AE parallela, essa segherà la curva ne' quattro punti M, M, ec., onde calate le ordinate MB MC MD ME determineranno le abscisse AB AC, AD, AE che sono le quattro radici dell'Equazione proposta.

Se dai vertici I della curva si tirino le tre ordinate IL IO, II, saranno AL AO AI i veri limiti [illegible]. La prima radice AB sarà tra il punto A ovvero zero, e il segmento AL, a cui corrisponde la massima ordinata LI. I veri limiti della seconda radice AC sono AL, ed AO. Della terza AD i limiti sono AO ed AI della quarta AE i limiti sono AI e qualunque altra quantità maggiore che AE.

D'onde ne segue, che il ritrovare i veri limiti delle radici, è lo stesso che determinare le ascisse le quali sostituite nella Equazione diano le massime ordinate, il qual Problema quando è massimo o minimo, e facilmente si [illegible] per calcolo infinitesimale.

Il metodo poi consiste nel moltiplicare ordinatamente i ter-

ni dell'Equazione data per una serie Aritmetica conveniente, in cui la differenza sia l'unità, e il primo termine eguagli il massimo esponente dell'Equazione proposta.

Sia dunque $x^4 - 24x^3 + 328x^2 - 1016x + 100 = 0$

Si moltiplichino i termini per $4, 3, 2, 1, 0$

E si avrà la prima Equazione de' limiti

$$4x^3 - 72x^2 + 656x - 1016 = 0$$

Se di nuovo si moltiplichino i termini per $3, 2, 1, 0$ si avrà la 2da Equazione de' limiti

$$2x^2 - 144x + 656 = 0$$

le cui radici sono i limiti delle radici della precedente

Finalmente se questa di nuovo si moltiplichi per $2, 1, 0$ si avrà per la terza equazione de' limiti

$$24x - 144 = 0$$

la quale risolta si trova $x = 6$

68. Coroll. Dalle cose predette facilmente si raccoglie, che se si sostituiscano due quantità diverse, l'una delle quali renda la somma positiva, negativa l'altra, o viceversa, saranno tali quantità sempre limiti di qualche radice. Ma se daranno il medesimo segno, la qual proprietà [illegible] di nuovo. Lo stesso dunque de' limiti devono dare segni contrari

Teorema

69. Se dassi un'equazione, nella quale siano più radici eguali, l'equazione de' limiti conterrà la medesima radice meno una

Sia l'equazione $x^4 - 4fx^3 + 6ffx^2 - 4f^3x + f^4 = 0$

le cui radici sono tutte eguali ad f

sarà la prima equazione de' limiti

$$4x^3 - 12fx^2 + 12ffx - 4f^3 = 0$$

cioè $x^3 - 3fx^2 + 3ffx - f^3 = 0$

di cui tre sono le radici eguali ad f.

Se a questa si cerchi l'equazione de' limiti

sarà: $x^2 - 2fx + ff = 0$

di cui due radici sono eguali ad f.

Se finalmente si cerchino i limiti di questa

si avrà $x - f = 0$

Similmente se si dia l'equazione

$$x^3 - 2fx^2 + ffx - cff = 0$$
$$- cx^2 + 2cfx$$

in cui due sono le radici eguali ad f, sarà l'equazione de' limiti

$$3x^2 - 4fx + ff - 2cx + 2cf = 0$$

di cui una è la radice f

70 Coroll. primo. Se dunque sostituito qualche limite nell'equazione data, sarà svanito tutti i termini, sarà questo limite radice comune, e la data equazione ne conterrà due almeno di tali radici.

Sia per esemp. l'equaz. $x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0$

sarà l'equazione de' limiti $xx - \frac{16x}{3} + 7 = 0$

di cui una delle radici è 3.

Ma sostituito 3 nell'equazione data diviene zero dunque 3 è altresì radice dell'equazione data e così due in quella saranno le radici eguali 3.

71 Coroll. 2do. [illegible] il limite nella equazione data sostituito risultano due segni, non pure saranno nell'equazione un [illegible] delle radici immaginarie [illegible]

E perchè le radici immaginarie sono sempre in numero pari, altrettante coppie di tali radici si avranno, quante volte [illegible] [illegible]

Ma nel mettere in chiaro questa teoria con degli esempi.

Esempio primo [illegible]

Siasi l'equazione [illegible] $= 0$ [illegible]

di cui si cerchino le radici con questo metodo [illegible]

Moltiplicati dunque i termini per $2, 1, 0$ diverrà l'equazione dei limiti $2x - 50 = 0$, ovvero $x - 25 = 0$ donde $x = 25$.

Sarà dunque 25 un limite e, poichè 0 è la minima di tutte le positive sarà la prima radice fra 0 e 25 Ed essendo il massimo coefficiente negativo maggiore di qualunque radice positiva, sarà l'altra radice tra 25, e 51 (aggiungendo [illegible] 1 al detto coefficiente negativo)

I limiti dunque sono 0, 25, 51.

E [illegible] sostituito 0 diviene più sostituito 25 — e sostituito 51 rimane +, e così sostituiti i segni alterni saranno giusti i nuovi limiti

Ora è da notare, che se l'equazione data non ha

segni alterni + e — [illegible] trasformazione.

Conchiudiamo dunque, la prima radice, sostituendo una quantità intermedia tra nulla, e 25, per esempio 10, e diviene il segno +. Dunque 10. è minore della radice, e sostituito 15 viene ancora +. Perciò 15 è pure minore della radice. Finalmente sostituito 20 diviene 0. Però 20 è la prima radice ricercata [illegible]

Similmente sostituita una quantità intermedia tra 20 e 31, come 31 e diviene [illegible]. Ma sostituito 30 diviene 0. Perciò 30 è la seconda radice. La ragione si ricava dalla predetta prova de' limiti.

Imperocchè dovendo vari limiti dare il segno — nel 2do termine, è chiaro che qualunque quantità tra il primo, e secondo limite, la quale sostituita nella data equazione per aver la più piccola radice dà — è maggiore della radice cercata e dando + è minore. All'opposto qualunque quantità tra il secondo, e terzo limite che venendo sostituita nell'Equazione per avere la seconda radice dà il segno + è maggiore della radice cercata, dovendo anche il vero limite dare il segno più per il terzo termine; perciò dandoci — sarà una quantità minore della seconda radice. Lo stesso s'inferisce per la terza e quarta radice, per la quinta, e sesta ecc.

71. Ma per raggiungere codesti limiti con metodo [illegible] e facilmente determinare le radici si danno le seguenti regole

I. Cercando la minor radice, [illegible] numeri interi la metà della differenza tra i due minimi limiti 0 e 25 la qual è 12 ovvero 13. Si scelga qualunque di questi due numeri (nel caso che la differenza [illegible]) sarà [illegible] 12, e quale aggiunta al minor limite 0 dà [illegible] 13.

II. Si sostituisca 13 nell'equazione e [illegible] dà +, a minore della radice cercata, [illegible] per [illegible] minore [illegible] limite [illegible] dà + si [illegible] come [illegible] o e sostituiscasi per limiti della prima radice 13. e 25.

III Si [illegible] di nuovo la metà della differenza tra 13. e 25. la qual metà è 6 e questa aggiunta al minor limite 13 dà 19 il che sostituito nell'equazione dà +, come 13 [illegible] 13 [illegible] trascurato 13 [illegible] e si [illegible] per limiti della prima radice 19 e 25. [illegible]

IV. Si continui a prendere la metà della differenza tra 19. e 25., ed è 3 che aggiunta al minor limite 19 dà 22. si sostituisca 22. nell'equazione e poichè dà −, come lo dà pure 25. si tralasci 25 e [illegible] 19. e 22 limiti più ristretti della prima radice.

V. [illegible] di nuovo la metà della differenza tra 19 e 22. [illegible] questa [illegible] numeri interi 1 ovvº 2 ; [illegible] 1 [illegible] 19. dà 20. il quale sostituito [illegible] nell'equazione [illegible] 20. sarà la minima radice che si cercava.

Per avere la seconda radice si operi col metodo [illegible] per ottenere la prima.

Se l'equazione [illegible] trovato [illegible] prima equazione dà limiti cioè della quadratica

come

come sopra, il 0. con le due radici di questa quadratica, e l'ultimo termine della data, aumentato dell'unità saranno i limiti della data medesima, per determinarne le radici.

Sia l'equazione $x^3 - 114x^2 + 3744x - 30240 = 0$

1.° moltiplicazione per 3 . . . 2 . 1 . . . 0 .

Prodotto . . . $3x^2 - 228x + 3744 = 0$

Prodotto ridotto . . . $x^2 - 76x + 1248 = 0$; A

2.° moltiplicazione per 2 . . . 1 . . . 0

Prodotto . . . $2x - 76 = 0$

Ossia . . . $x - 38 = 0$ [illegible] III

Quindi i limiti della quadratica A saranno 0, 38, 77 (77 è il coefficiente negativo aumentato dell'unità)

Ritrovate con questi limiti, come sopra, le due radici 24 e 52 della detta Equazione A, si avranno i limiti della cubica proposta 0, 24, 52, 30241, per cui si trovano le tre radici della data equazione come sopra.

Se l'equazione sia biquadratica i suoi limiti, nello stesso modo, saranno lo 0, con le radici della cubica, e l'ultimo termine della data aumentato dell'unità, con cui si determineranno [ai suoi limiti] le sue radici.

Annotazione.

72. Se qualche limite nell'Equazione sostituito dia zero, è di indizio che vi sono due, o più radici eguali. Così se si dia l'equazione $x^3 - 30x^2 + 288x - 864 = 0$, si troverà che i suoi limiti sono 0, 6, 12, 865. Ma poichè sostituito 12 la somma diviene zero, sarà 12 una radice della data equazione. Ma questa dunque avrà

Lo

due radici eguali, e la terza ineguale avrà nei limiti
[illegible]

Esempio 2do.

73. Sia $x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0$

la prima equazione de' limiti è

$$4x^3 - 240x^2 + 3996x - 14937 = 0$$

Cioè $x^3 - 60x^2 + 999x - 3734\frac{1}{4} = 0$

la seconda $xx - 40x + 333 = 0$

la terza $x - 20 = 0$

I limiti dunque della seconda sono 0, 20, 41.
sostituite per la quantità intermedie, si troverà la
prima radice tra 11, e 12. l'altra tra 28 e 29.
laonde sono irrazionali

Siano dunque i limiti nella cubica

0, 11, 28, 3736.

Fatta la sostituzione, si trovano le radici

la prima tra 5. e 6.

la seconda tra 21. e 22.

la terza tra 34. e 35.

Siano dunque i limiti dell'equazione proposta

0. 6. 21. 34. 5001.

Sostituite dunque le quantità intermedie si troveranno
le radici

la prima fra 0 e 1

la 2da fra 12. e 13

la 3za fra 32. e 33

la 4ta fra 34. e 35

E sono tutte irrazionali.

Come poi dobbiamo approssimarsi alle vere radici, s'insegnerà a suo luogo.

Esempio 35°.

74. Sia l'Equazione $x^3 - 7x + 6 = 0$ A

Si trasformi in altra che abbia tutti i termini, e con i segni alternati, il che si ottiene accrescendo, o minorando le radici, il coefficiente negativo sui primi.

Pongasi dunque $x = 8 - z$

E si avrà $z^3 - 24z^2 + 185z - 462 = 0$ B

Di cui si devono trovare le radici. Saranno perciò l'equazioni dei limiti.

La prima $z^2 - 16z + \frac{185}{3} = 0$

La seconda $z - 8 = 0$.

Saranno dunque i limiti della quadratica 0, 8, 17.

E sostituite le quantità intermedie trovasi esservi una radice tra 9. e 10

Si pongano i limiti della prima radice cercata nella cubica 0, 9.

E sostituite le quantità intermedie trovasi che 6. riduce l'equazione B al zero, perciò 6 sarà una radice della stessa equazione

Dividasi dunque l'Equazione B per $z - 6$

risulta $z^2 - 18z + 77 = 0$

9a

La quale risolta si troveranno le radici 7, [illegible] di cui ne [illegible]

Perciò le radici dell' Equazione cubica B. saranno

6, 7, 11.

E poichè si pose $x = z - 7$

saranno le radici dell' Equazione proposta 2, 1, −3.

Esempio 4to.

75. Sia l'equazione $x^3 - 19x - 30 = 0$ [illegible]

le cui radici sono tutte reali, e però giusto il metodo generale [illegible] occorrerebbe [illegible] i casi irriducibili.

Si cambi in altra, che abbia tutti i termini, e con li segni alterni, posto cioè $x = z - 20$, e si avrà $z^3 - 60z^2 + 1181z - 7650 = 0$ C

Trovate l'equazioni de' limiti, sarà [illegible]

la prima $zz - 40z + \frac{1181}{3} = 0$

la 2da [illegible] $2z - 40 = 0$, cioè $z - 20 = 0$.

D'onde risulta $z = 20$ [illegible]

I limiti dunque dell' equazione quadratica sono

0, 20, 41.

Per cui si trova la prima radice tra 17, e 18. l'altra fra 22,810 e 22,817

[illegible] dunque i limiti della [illegible] radice nella cubica 0 18

E poichè sostituita la quantità intermedia 17 diviene [illegible] sarà 17 la prima radice dell' equazione C.

Divisa dunque la stessa equazione per $z - 17$

si diminuirà alla quadratica, la quale sarà $z^2 - 43z + 450 = 0$

[illegible]

la quale risolta, si trovano le radici 14, e 25.

Saranno dunque le radici nella trasformata C 17, 14 e 25.

E poichè si pose $x = y + 20$ = ...

saranno le radici della equazione data −3, −6, 5 ...

Esempio 5°.

Per l'equazioni di più radici eguali

76. Sia $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3 = 0$ A

Le equazioni de' limiti sono

La prima $x^3 - \frac{18x^2}{4} + 6x - \frac{10}{4} = 0$ B.

La seconda $x^2 - 3x + 2 = 0$ C

La terza $x - \frac{3}{2} = 0$

Laonde si avrà $x = \frac{3}{2}$

Sarà dunque la prima radice dell'equazione quadratica tra 0, e $\frac{3}{2}$.

E fatta la sostituzione, si trova la radice = 1

La prima radice dunque della equazione cubica B è tra i limiti 0, e 1.

Ma sostituito il limite 1 divisore o dunque 1. è radice della cubica, e poichè 1 è parimente radice nella quadratica C, saranno nella cubica due radici = 1 e nella biquadratica tre radici = 1.

Divisa dunque la biquadratica pel cubo a latere $x - 1$, trovasi la quarta radice = 2.

Laonde le radici cercate sono 1. 1. 1. 2.

Esempio 1.°

Per le radici immaginarie.

77. Sia $x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 14 = 0$

saranno le equazioni de' limiti, cioè

la prima $x^3 - \frac{18x^2}{4} + \frac{34}{4}x - 6 = 0$ B.

La seconda $x^2 - 3x + \frac{17}{6} = 0$ C

La terza $x - \frac{3}{2} = 0$

Saranno dunque i limiti per la quadratica C $0, \frac{3}{2}, 4$.

Ma poichè sostituito 0, diviene più, e sostituito $\frac{3}{2}$, diviene parimente +, la quantità $\frac{3}{2}$ non sarà limite, il che è di argomento, che le radici nella quadratica sono immaginarie.

Saranno dunque immaginarie ancora nella cubica B, ed una reale; che si avrà (non avendo limiti nella quadratica C), dovrà cercarsi tra 0, e 7, massimo coefficiente della data aumentato dall'unità, e trovasi tra 1, e 2.

Si pongano dunque i limiti della equazione proposta 0, 2, 24.

Ma poichè sostituito 2. diviene più, quando dovrebbe divenir — non sarà limite il 2. Perciò le altre due radici sono altresì immaginarie; e in conseguenza ne resulta la risoluzione.

78. Ancora si può far uso del metodo de' limiti senza ...

alcuna trasformazione dell'equazione: ma poichè la pratica riesce più facile, perciò ci serviremo della trasformazione [illegible]

Metodo Newtoniano

per trovare i limiti.

79. Il punto consiste nel dedurre dalla data le equazioni de' limiti, e adire, come si è spiegato sopra. Quindi noi quel numero positivo che sostituito invece dell'incognita in tutte le equazioni ne la somma positiva, sarà maggiore di ciascuna radice positiva dell'equazione data. Per l'inverso il negativo, che dà la somma positiva nelle equazioni di dimensioni pari, e negativa in quelle di dimensioni impari, sarà maggiore di qualunque radice negativa dell'equazione proposta [illegible]

Sia $x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 64x - 120 = 0$

Avremo le equazioni dei limiti,

I. $x^4 - \frac{16x^3}{5} - 6x^2 + 12x + \frac{64}{5} = 0$

II. $x^3 - \frac{6x^2}{5} - 3x + 3 = 0$ [illegible]

III. $x^2 - \frac{4x}{5} - 1 = 0$ [illegible]

IV. $x - \frac{2}{5} = 0$.

Se in ciascuna equazione si sostituisca 2 invece dell'incognita non viene, in tutte la somma positiva: Ma viene, bensì sostituito il 2. Perciò 2 sarà un li-

limite, cui niuna radice positiva della equazione data trascende.

Similmente, per indagare il limite negativo, si sostituisca −1, e poichè i negativi non corrispondono non sarà questo un limite, nè similmente −2. Ma sostituito −3 dà la somma positiva nelle equazioni di grado pari, negativa in quelle di grado impari. Per ciò −3 sarà un limite maggiore di qualunque radice negativa. [illegible] Quindi le positive tra i limiti 0, +2; e le negative [illegible] −3.

Il metodo prescritto si giusta da questa ragione: che qualunque radice positiva nelle equazioni de' limiti è sempre minore della massima positiva dell'equazione data; e ciascuna negativa è parimenti minore della massima negativa nella proposta.

Perchè, se in qualunque equazione il numero che trascende la massima radice positiva dà la somma positiva, è necessario che il numero, il quale in tutte le equazioni dà la somma positiva eccede la massima radice di tutte, e però sia limite positivo.

Similmente: essendo che in qualunque equazione il numero [illegible] trascende la maggiore negativa dia la negativa la somma nella dimensione impari, positiva nella dimensione pari; se dunque il numero

ri

trario di tali termini in tutte trasformate la massima radice negativa di tutte; e però sarà un limite negativo.

Problema

Sia dati i limiti prossimi della quantità interna d'una equazione, approssimarsi in infinito.

Il primo metodo sta riposto nel moltiplicare le radici della data equazione per qualunque serie di numeri decimali sicchè ne risulti una nuova equazione, le cui radici meno differiscono da' suoi limiti.

Sia per Esemp. $xx - 20x + 65 = 0$

la prima radice della quale sia stata ritrovata tra 4. e 5.

Fatto $1000x = y$, si moltiplicheranno le radici per 1000, e sarà la nuova equazione

$$yy - 20000y + 65000000 = 0$$

La minima radice della quale è tra 4000 e 5000. Cerchinsi dunque i limiti più prossimi, si troverà tra 4083, e 4084. Sarà dunque la radice cercata tra $\frac{4083}{1000}$, e $\frac{4084}{1000}$, ovvero in decimali tra 4.083, e 4.084.

Volendo i limiti più prossimi converrà moltiplicare l'equazione per una serie decimale di termini maggiori, anche per estrarre la radice della trasformata, si avranno i limiti sempre più prossimi.

Secondo Metodo

Pongasi $y + 4 = x$

E sarà trasformando l'equazione

$$xx = y^2 + 8y + 16$$

$$-20x = \quad -20y - 80$$

$$+65 = \quad\quad + 65$$

Quindi $y^2 - 12y + 1 = 0$

Trascurato y^2 attesa la di lui piccolezza

Diviene $-12y + 1 = 0$ e cambiati i segni

$12y - 1 = 0$. Laonde $y = \frac{1}{12}$.

Pongasi di nuovo $x = y + 4 + \frac{1}{12}$ ovvero $= \frac{12y + 49}{12}$, e

sarà

$$xx = 144y^2 + 1176y + 2401 : 144$$

$$-20x = \quad -2880y - 11760 : 144$$

$$+65 \times 144 = \quad +9360 : 144$$

Cioè $144y^2 - 1704y + 1 : 144$

E semplificando $y^2 - \frac{1704y}{144} + \frac{1}{144} = 0$

Trascurato y^2 diviene $y = \frac{1}{1704}$

[illegible]

Dunque $x = 4 + \frac{1}{12} + \frac{1}{1704} = 4\frac{143}{1704}$

Ossia per decimali 4.083. Il che può continuarsi all'infinito.

Altro

Altro Esempio

Sia l'equaz.e cubica $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$

Da cui si dovrà estrarre la radice per approssimazione

Posto il limite minore = 5 si faccia primieramente

$x = y + 5$

E sarà $\quad x^3 = y^3 + 15y^2 + 75y + 125$

$+ \quad 2x^2 = \qquad 2y^2 + 20y + 50$

$- \quad 23x = \qquad -23y - 115$

$- \quad 70 = \qquad -70$

A $\quad y^3 + 17y^2 + 72y - 10 = 0$

Trascurate le altre dimensioni di y, si avrà $72y - 10 = 0$.

E diviene $y = \frac{10}{72} = \frac{5}{36}$ la prima approssimazione

Pongasi di nuovo $x = 5 + \frac{5}{36} + y = \frac{36y + 185}{36}$, e fatta

la sostituzione sarà

$x^3 = 46656y^3 + 7214720y^2 + 3696300y + 6331625$

$+ \quad 2x^2 = \qquad + 93312y^2 + 959040y + 2464200$

$- \quad 23x = \qquad - 1073088y - 5514480$

$- \quad 70 = \qquad - 3265920$

B $\quad 46656y^3 + 415184y^2 + 3582252y + 15425 = 0$

Trascurate le altre dimensioni di y, sarà

$3582252y + 15425 = 0$

e risulta $y = \frac{15425}{3582252}$

Sarà dunque la radice di $x = 5 + \frac{5}{36} + \frac{15425}{3582252}$

$= 5 + \frac{18466560}{128961072}$, ovvero in decimali $= 5.14319$ ec.

Per compendio di questo metodo basta calcolare i termini dell'ultima, e penultima colonna delle trasformate A, e B, giacchè si trascurano le alte dimensioni di y

Universalmente

Sia qualunque equazione biquadratica

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

Posto il limite minore $= f$

Si faccia $x = f + y$

E diverrà una nuova equazione, che può esprimersi

$$y^4 - ny^3 - py^2 + qy \pm r = 0 \quad B$$

In cui $y = \dfrac{r}{y^3 - ny^2 - py \pm q} \quad C$

Sia nell'equazione B si trascurino le alte dimensioni di y come quantità abbastanza piccole.

Diverrà $qy - r = 0$

E risulta $y = \dfrac{r}{q}$

Il qual valore sostituito nel canone C

Si avrà $y = \dfrac{r}{q - \dfrac{pr}{q} - \dfrac{nr^2}{qq} + \dfrac{r^3}{q^3}}$

Quindi moltiplicando tanto r quanto q per $nrr + r^3$, q^3

Diverrà $y = \dfrac{q^3 r}{q^4 - pqqr - nqrr + r^3} \quad D$

Dal qual canone si ricava il valore di y

Esem. 10

Sia $x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0$

Col minor limite della seconda radice $= 12$

Facciasi dunque $x = 12 + y$; avrà la trasformata

$$y^4 - 32y^3 - 18y^2 + 5367y - 4036 = 0 \quad E$$

a cui corrisponde la trasformata seguente

$$y^4 - ny^3 - py^2 + qy - r = 0 \quad F$$

Sarà dunque $n = -32$

$p = -18$

$q = +5367$

$r = 4036$

I quali valori sostituiti nel calcolo

$$y = \frac{q^3 r}{q^4 - pq^2 r - nqr^2 + r^3}$$

Diviene $y = \dfrac{623944476023064}{824886660046681} = 0.75640$

Dunque la radica $x = 12.75640$

E di nuovo, ponendo $y = .7 + z$ ... la sola prima decimale $.7$, avrà la nuova trasformata

$$z^4 - 29.2z^3 - 82.26z^2 + 5296.132z - 298.6559 = 0$$

a cui corrisponde la trasformata z

$$z^4 - nz^3 - pz^2 + qz - r = 0$$

Dunque pel metodo prescritto sarà

$$z = \frac{q^3 r}{q^4 - pq^2 r - nqr^2 + r^3} = 0.056441$$

a cui aggiunto 12.7 trovato sopra, si avrà $x = 12.756441$ valore ... alla vera radice

secondo

Secondo Metodo

Nella trasformata [illegible] $-py^2+qy-r=0$

Posso scambiati i segni: $py^2-qy+r=0$ [illegible]

di cui $y=\frac{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-pr}}{p}$ giusto il metodo delle quadratiche

sostituendo i numeri della prima trasformata E sarà

$y=2083.\ldots\frac{\sqrt{2466047169}}{4}\ldots=0.7\ldots$

Questo valore minore del giusto, come si può vedere scrivendo la trasformata F come segue

$py^2-qy+r+ny^3-y^4$

in questa considerata come un'equazione quadratica

si ha $y=\frac{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-pr-pny^3+py^4}}{p}$

Perciò $\sqrt{\frac{qq}{4pp}-\frac{r}{p}}>\sqrt{\frac{qq}{4pp}-\frac{r}{p}-\frac{ny^3}{p}+\frac{y^4}{p}}$

E in conseguenza da $\frac{1}{2}$ di q si toglie un valore $\sqrt{\frac{qq}{4pp}-\frac{r}{p}}$ troppo grande, e però si viene la quantità minore

Per correggere questo valore di y si supponga

$y=\frac{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-pr}}{p}$ [illegible]

E vengano in vece di y nell'Equazione

$y=\frac{\frac{1}{2}q}{p}-\frac{\sqrt{\frac{1}{4}qq-pr-pny^3+py^4}}{p}$

$=\frac{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-pr-pny^3+py^4}}{p}$

Si sostituiscano invece delle lettere i numeri della prima trasformata E e si avrà in note decimali $y=0.75641609$ e però $x=12.75641609$ radice assai approssimata alla vera.

[illegible]

che la somma benchè ella sia ancora una poca deficien-

te per essere z minore del vero valore di y; e però $-\frac{nz^3}{p}$

$< -\frac{nz^3}{p}$ la qual quantità sottratta nel valore di y da

$\frac{1}{4}qq:p$ lascia un residuo maggiore del giusto, e questo

poi sottratto da $\frac{1}{2}q:p$, fa il valore di y minore del vero.

Ma se di nuovo pongasi $y = 0.7 + z$ usata come sopra

la sola prima decimale 0.7 sarà la nuova trasformata

$$z^4 - 29.2z^3 - 82.26z^2 + 529.132z - 294.6350 = 0$$

a cui corrisponde la trasformata generale

$$z^4 - nz^3 - pz^2 + qz - r = 0$$

E col secondo metodo summentovato sarà

$$y = \frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr - nqz^3 + prz^4}}{n} = 0.0564417944 8074402$$

e in conseguenza $x = 12.7564417944 8074402$

la quale può continuarsi in infinito.

La precedente approssimazione $\frac{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - pr}}{p}$ può anco servire per le cubiche.

Così se diasi $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$ usata sopra

fatto $x = 5 + y$, sarà la trasformata

A $y^3 + 17y^2 + 72y - 10 = 0$ a cui corrisponde la tra-

sformata generale $y^3 + py^2 + qy - r = 0$, di cui ultimi tre

termini si riduce la detta formola. Sostituiti i numeri della tra-

sformata A

si avrà $y = \frac{36}{17} - \sqrt{\frac{1296}{4} - \frac{680}{4}} : 17 = 2.1176 - 1.9738$

$= 0.1438$; però $x = 5.1438$

Fatta una nuova trasformazione e sostituiti di nuovo i numeri nella stessa formula, si otterrà sempre una radice più esatta; e poichè la prima approssimazione $y = \frac{q}{r}$ riesce maggiore del giusto e parimente $y - \frac{q}{r}$
$\frac{-1\frac{1}{4}qq - rr}{r}$ della prima trasformazione nella cubica riesce maggiore del vero nella seconda trasformazione molto parrà $x = 0.1 + y$ pigliando la prima delle decimali ritrovata con la prima trasformazione.

Applicazione dell'Analisi

A' Problemi

di più alte dimensioni

Sezione II.

Risoluzione di due dimensioni

Caso primo

Problema primo

Ritrovare due numeri di cui quadrati sia data la differenza e parimenti la somma.

Sia la differenza de' quadrati $= 12$
E la somma $= 20$
Il primo numero cercato $= x$; il secondo $= y$
Sarà per la prima condizione $x^2 - y^2 = 12$ A
per la seconda $x^2 + y^2 = 20$ B
In A $x^2 = 12 + y^2$
Sostituendo in B $12 + 2y^2 = 20$

E diviene $y^2 = 4$

donde $y = \pm 2$

Se sigliesi $y = 2$; sarà $x = 4$

Se sigliesi $y = -2$, diverrà $x = -4$.

Universalmente

Posta la differenza $= a$ e la loro somma $= b$ si avrà

Per prima cond.^{e} $x^2 - y^2 = a$ A.

E per la 2.da $x^2 + y^2 = b$ B

Trasponendo in A diviene $x^2 = y^2 + a$

Sostituendo in B si avrà $2y^2 + a = b$

E diviene $y^2 = \frac{b-a}{2}$

Quindi estratta la radice risulta $y = \pm \sqrt{\frac{b-a}{2}}$

Problema 2.do

Ritrovare due numeri, la cui somma sia 8, e il loro prodotto 12.

Primo numero cercato x; secondo y

Per prima condizione $x + y = 8$ A

E per la seconda $xy = 12$ B

In B $x = \frac{12}{y}$

Sostituendo in A $\frac{12}{y} + y = 8$

Cioè levata la frazione $y^2 + 12 = 8y$

E trasponendo $y^2 - 8y = -12$

Si compisca il quadrato

e diverrà $y^2 - 8y + 16 = 4$

Ed estratta la radice $y - 4 = \pm 2$.

E risulta $y = 4 \pm 2$.

Se si piglia $y = 6$; sarà $x = 2$

se si prenda $y = 2$, diverrà $x = 6$

Universalmente

Posto $8 = a$, e $12 = b$ sarà

Per la prima cond. $x + y = a$ A

E per la 2da $xy = b$ B

In B dividendo per y diviene $x = \frac{b}{y}$

Sostituendo in A $\frac{b}{y} + y = a$

Cioè levata la frazione $b + y^2 = ay$

Trasponendo $y^2 - ay = -b$

Si compisca il quadrato

E diverrà $y^2 - ay + \frac{aa}{4} = \frac{aa}{4} - b$

Laonde $y - \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - b}$

E risulta $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - b}$

Problema terzo.

Trovare due numeri di cui la quintupla somma agguagli il loro prodotto moltiplicato per $1\frac{1}{2}$, supponendo questo risultato eguale alla differenza de' loro quadrati

Sia x il numero maggiore; minore y

Dunque per la prima cond. $(x+y)5 = \frac{3xy}{2}$ A

E per la 2da $\frac{3xy}{2} = x^2 - y^2$ B

Se A $\quad 5x + 5y = \frac{3xy}{2}$

Levata la frazione $\quad 10x + 10y = 3xy$

Dunque $\overline{x+y} \cdot 5 = x^2 - y^2$

E dividendo per $x + y$ diviene

$$5 = \frac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y$$

Ovvero ordinando $\quad x = y + 5 \quad C$

Ma $\quad 10x + 10y = 3xy \quad D$

Moltiplicando C per 10 risulta

$$10x = 10y + 50$$

E sostituendo in D $\quad 10y + 50 + 10y = 3xy$

Ovvero $\quad 20y + 50 = 3xy \quad E$

Ma $\quad x = y + 5$

Dunque sostituendo in E $\quad 20y + 50 = 3y^2 + 15y$

E ordinando $\quad 3y^2 - 5y = 50$

E dividendo per 3 $\quad y^2 - \frac{5y}{3} = \frac{50}{3}$

Compiendo il quadrato

E diverrà $\quad y^2 - \frac{5y}{3} + \frac{25}{36} = \frac{50}{3} + \frac{25}{36} = \frac{625}{36}$

Ed estraendo la radice $\quad y - \frac{5}{6} = \pm \sqrt{\frac{625}{36}} = \pm \frac{25}{6}$

Laonde $\quad y = \frac{5}{6} \pm \frac{25}{6}$

Preso il segno + $\quad y = \frac{25}{6} + \frac{5}{6} = 5$

Preso il segno − $\quad y = -\frac{25}{6} + \frac{5}{6} = -3\frac{1}{3}$

Dunque $x = 10$ ovvero $x = 1\frac{2}{3}$

Prova

$(10+5)\,5 = 75 - 5\cdot5 \cdot 10 \cdot 5 = \frac{150}{2} = 75$

$100 \quad 25 = 75$

Problema 456.

Ritrovare due numeri, la cui somma è 4, e la somma de' quadrati 40.

Numeri cercati x, y

Dunque per la prima cond. $x + y = 4$ A

E per la seconda $x^2 + y^2 = 40$ B

Nell' Equazione A $x = 4 - y$

Sostituendo in B $16 - 8y + 2y^2 = 40$

Ovvero $8 - 4y + y^2 = 20$

Laonde $y^2 - 4y = 12$

E compiendo il quadrato

Diverrà $y^2 - 4y + 4 = 16$

Dunque estratta la radice $y - 2 = \pm 4$

E diviene $y = 2 \pm 4$

Se faciasi $y = 6$ sarà $x = -2$

Se prendasi $y = -2$ sarà $x = 6$

Universalmente

Posta la somma $4 = a$, e la somma 40 de' quadrati $= b$

Sarà

Sarà per la prima cond.e $x + y = a$ A

per la 2da = ... $x^2 + y^2 = b$ B [illegible]

Trasponendo in A diviene $x = a - y$

E quadrando $x^2 = aa - 2ay + y^2$

Sostituendo dunque in B. $aa - 2ay + 2y^2 = b$

Cioè $y^2 - ay = \frac{b - aa}{2}$

Compiendo il quadrato

E sarà $y^2 - ay + \frac{aa}{4} = \frac{aa}{4} + \frac{b - aa}{2}$

Dunque $y + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{b}{2} - \frac{aa}{4}}$

E diviene $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{b}{2} - \frac{aa}{4}}$

Problema 57o.

Due mercanti posero insieme a traffico un Capitale 12; e il guadagno fu 40.

Il primo ricavò 20 tanto per capitale quanto per il tempo 2 e l'altro ebbe 72. tanto per il capitale quanto per il tempo 4. Si cerca il capitale di ciascheduno.

Sia il capitale del primo $= x$

Dunque il capitale del 2do $= 12 - x$.

Il capitale composto del primo per il tempo $= 2x$

Il capitale composto del 2do $= 48 - 4x$

Guadagno del primo $= 20 - x$

Guadagno del 2do $= 72 - 12 + x$ cioè $60 + x$

Sar.

Perchè, noi i guadagni devono essere nella ragione dei composti di capitale, e di tempo

Si avrà $20-x : 60+x = 2x : 48-4x$

Laonde moltiplicando gli estremi, e i medj.

$-80x + 4x^2 + 960 - 48x = 120x + 2x^2$

E riducendo, $x^2 - 124x = -480$

Compiendo il quadrato

E diviene $x^2 - 124x + 3844 = 3844 - 480$

Ed estraendo la radice $x - 62 = \pm 58$

Perciò $x = 62 \pm 58$

Se pigliasi $x = 4$; il Capitale dell'altro fu $= 8$

Ma se pigliasi $x = 120$; il Capitale dell'altro sarebbe $= 108$ nel qual caso si deduce, che il secondo non solo non abbia posto capitale; ma abbia guadagnato sopra il Capitale del primo, quanto importa la parte 108.

Problema 6to.

Pietro ha due generi di merci. La libra del primo genere vale Scudi 3. più che la libra del 2do. Le libre poi sono 16, e v'è un medesimo dispendio dell'una, e dell'altra merce, cioè 60 Scudi. Si cerca il valore di una libra dell'uno, e dell'altro genere, e quante sono le libre del primo, e quante del 2do.?

Prezzo della libra del 2do genere $= x$

Dun.

Dunque il prezzo del primo genere $= x + 3$

Quantità della prima merce $= y$

Quantità della 2da $= 15 - y$

Prezzo totale della prima merce $= xy + 3y$

Prezzo totale della 2da $= 15x - xy$

Per la prima cond.e $xy + 3y = 30$ A

Per la 2da $15x - xy = 30$ B

Dall'equazione A $y = \frac{30}{x+3}$

Sostituito questo valore in B $15x - \frac{30x}{x+3} = 30$

E levato il divisore $15x^2 + 45x - 30x = 30x + 90$

Cioè riducendo $x^2 - x = 6$

Completando il quadrato

E diverrà $x^2 - x + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

Estraendo la radice, e trasponendo

Si ha $x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

Cioè $x = 3$, ovvero -2

Se pongasi $x = 3$; sarà $y = 5$

Se pongasi $x = -2$; sarà $y = 30$

Problema 7mo

Dati tre numeri 3, 4, 6 ritrovare il 4to proporzionale contrarmonico.

Numero cercato x

Sia

Dunque per la definizione di questa proporzione recata sopra sarà

$$\overline{5-4} : \overline{6-x} :: x : 5$$

Moltiplicando estremi e medj

$$25 - 20 = 6x - x^2$$

Cioè riducando e ordinando

$$x^2 - 6x = -5$$

Compiendo il quadrato

si ha $\quad x^2 - 6x + 9 = 4$

Estratta la radice diviene $x = 3 \pm 2$

Due adunque possono essere i contrarmonici ricercati 1 ovvero 5

Universalmente

Posto $a = 5$ $b = 4$ $c = 6$ col numero contrarmonico x sarà l'equazione

$$\overline{a-b} : \overline{c-x} = x : a$$

Dunque $\quad aa - ab = cx - xx$

Ovvero $\quad xx - cx = ab - aa$

Compiendo il quadrato

$$xx - cx + \frac{cc}{4} = ab - aa + \frac{cc}{4}$$

Estratta la radice, e trasponendo

Rimarrà $\quad x = \frac{c}{2} \pm \sqrt{ab - aa + \frac{cc}{4}}$

Quale

Problema 800

Alquante persone devono pagare egualmente scudi 60. Tre di queste non pagando la loro parte tocca alle rimanenti di dover sborsare scudi $1\frac{2}{3}$ di più. Si cerca il numero delle persone?

Sia x il numero cercato. Dunque per la condizione del problema si avrà l'equazione

$$\overline{\frac{60}{x} + \frac{5}{3}} \times \overline{x - 3} = 60$$

Cioè tolte le frazioni

$$\overline{180 + 5x} \times \overline{x - 3} = 180x$$

Cioè fatta la moltiplicazione

$$180x + 5x^2 - 540 - 15x = 180x$$

Cioè riducendo $\quad 5x^2 - 15x = 540$

E dividendo per 5 $\quad x^2 - 3x = 108$

Compiendo il quadrato

Si avrà $\quad x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 108 + \frac{9}{4} = \frac{441}{4}$

Estratta la radice $\quad x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{441}{4}} = \pm\frac{21}{2}$

E trasponendo $\quad x = \frac{3}{2} \pm \frac{21}{2}$

Preso il segno +, si trova $x = 12$

Preso il segno − risulta $x = -9$

Vi erano dunque 12 persone, le quali pagando 5 scudi a testa pagano 60. Dovendo poi i 9 rimanenti pagare scudi $1\frac{2}{3}$ a testa di più, cioè $\frac{20}{3}$, pagano similmente scudi 60. Con che si verifica la risoluzione

Problema 9no.

Si aggregano alquante Persone in Casa di Tizio per fare un festino, con patto di pagare a Tizio scudi di 115., e con condizione altresì, che se altri vogliano aggregarsi paghino essi il medesimo a testa, per dividersi i primi fra loro egualmente il soprappiù. Sopraggiungono altre 7. Persone, e i primi vengono a pagare scudi $1\frac{1}{6}$ di meno a testa. Si cerca il numero de' primi aggregati.

Sia x il numero cercato

Dunque per le condizioni del problema si avrà

$$\overline{\frac{115}{x} - \frac{7}{6}} \times \overline{x+7} = 115$$

Cioè levata la frazione

$$\overline{690 - 7x} \times \overline{x+7} = 690x$$

Ovvero fatta la moltiplicazione

$$690x - 7x^2 + 4830 - 49x = 690x$$

Cioè riducendo, e trasportando, segue

$$7x^2 + 49x = 4830$$

E dividendo per 7. $\quad x^2 + 7x = 690$

Compiasi il quadrato

E si avrà $\quad x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 690 + \frac{49}{4} = \frac{2809}{4}$

Estraendo la radice quadrata

$$x + \frac{7}{2} = \pm\sqrt{\frac{2809}{4}} = \pm\frac{53}{2}$$

E $\quad x = -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\ldots}{2}$

Preso il segno + si trova $x = 23$

Preso il segno − risulta $x = 30$

V'erano dunque da principio 23. Persone in Casa di Ti; ri, le quali dovevano pagare Scudi 31. a testa. Ma sopravvenute le altre sette Persone pagarono le prime Scudi 9. $\frac{1}{6}$ di meno. [illegible]

Problema 10.

Due si associano. Il primo mette D.ri 20. per due Mesi. l'altro non si sa quanto, per 3. Mesi. Guadagnano D.ri 14. Al 2do tra capitale, e guadagno toccò D.ri 16. Si cerca il capitale del 2do, e il guadagno di ciascuno?

Sia x il capitale del 2do

sarà il di lui guadagno $= 16 - x$

Quindi il guadagno del primo $= 14 - 16 + x$

Ovvero $= x - 2$

Capitale composto del primo $20 \times 2 = 40$

del 2do ... $x \times 3 = 3x$

Ora poichè i guadagni sono fra loro come i capitali composti, si avrà:

$$40 : 3x :: x - 2 : 16 - x$$

Moltiplicando gli estremi, e i medj

$$640 - 40x = 3x^2 - 6x$$

Cioè riducendo $\quad 3x^2 + 34x = 640$

Dividendo per 3. $\quad x^2 + \frac{34x}{3} = \frac{640}{3}$

Com-

Compiendo il quadrato

risulta $x^2 + \frac{34x}{3} + \frac{289}{9} = \frac{640}{3} + \frac{289}{9} = \frac{2209}{9}$.

Estraendo la radice quadrata

$$x + \frac{17}{3} = \pm \frac{47}{3}$$

Se si piglia il segno + sarà $x = 10$

Se si piglia il segno − risulta $x = -\frac{21}{3}$.

Dunque il capitale del 2do fu di Ducati 101 il guadagno del 1° = 8, e perciò il guadagno dell'altro = 6.

Problema 11.

Un mercante vende Braccia 20 di panno per lire 220, e dice che tanto ha guadagnato per 100, quanto costò a lui il Braccio. Si cerca quanto gli abbia costato il Braccio, e quanto abbia guadagnato?

Poichè il guadagno per % agguaglia il costo di un Braccio, bisogna prima investigare il costo senza il guadagno.

Se dunque si dica x il guadagno per %, sarà come $100 + x : 100 :: 220 : \text{al } 4^{\text{to}}$

il quale determinato diviene $\frac{22000}{100+x}$ valore cercato

Sarà dunque l'equazione $20x = \frac{22000}{100+x}$

Cioè eliminato il divisore $2000x + 20x^2 = 22000$

Dividendo per 20 e ordinando $x^2 + 100x = 1100$

Compiendo il quadrato

Diverrà $x^2 + 100x + 2500 = 2500 + 1100 = 3600$

Ed

E' estratta la radice $x + 50 = \pm 60$.

E diviene $x = \pm 60 - 50$

Preso il segno +, sarà $x = 10$ [illegible]

Preso il segno − risulta $x = -110$ [illegible]

D'onde si raccoglie, che il braccio del panno costò al Mercante L. 10, che ha guadagnato il 10 per 100, [illegible] L. 20 [illegible]

Problema 12.

Due mobili si partono nello stesso punto dalle due estremità di una distanza di miglia 360. Il primo a destra fa il primo giorno 6 miglia, il 2do 12, e così successivamente crescendo ogni giorno 6 miglia; l'altro fa il primo giorno 4 miglia, il secondo 8 e così successivamente crescendo ogni giorno 4 miglia. Si cerca in quanti giorni s'incontreranno questi due mobili, e quante miglia avrà fatto ciascuno.

Sia x il termine cercato cioè il numero dei termini della serie del primo mobile.

Perchè dunque l'ultimo termine deve contenere il primo, col numero dei rimanenti moltiplicati nella differenza, sarà l'ultimo termine $= 6 + \overline{x-1} \times 6 = 6 + 6x - 6 = 6x$, la cui somma è $6x + 6 \times \frac{x}{2} = \frac{6x^2 + 6x}{2}$.

Con lo stesso metodo si trova che la somma della seconda serie è $= \frac{4x^2 + 4x}{2}$.

Ma

Ma la somma di queste due serie dee uguagliare tutto lo spazio di 360. miglia; perciò si avrà l'Equazione:

$$\frac{6x^2+6x}{2}+\frac{4x^2+4x}{2}=360$$

Levato il divisore, e aggiugnendo diviene

$$10x^2+10x=720$$

Cioè dividendo per 10. $x^2+x=72$

Compiendo il quadrato

$$x^2+x+\frac{1}{4}=72+\frac{1}{4}=\frac{289}{4}$$

Estraendo la radice. $x+\frac{1}{2}=\pm\frac{17}{2}$

E diviene $x=\pm\frac{17}{2}-\frac{1}{2}$

Preso il segno + sarà $x=8$.

Preso il segno − diviene $x=-9$

Si conchiude, che i due mobili si incontreranno nel termine di otto giorni; il primo de' quali ha percorso miglia 216, l'altro miglia 144

Applicazione dell'Analisi

Ai Problemi di La quattro dimensioni ec.

Caso 2do.

Problema 1mo

Tre Mercanti messero a traffico insieme un Capitale di 80 Il primo per tempo 2 il secondo per tempo 3 il terzo per tempo 4 e il Capitale diviene 130. In fine del tempo si venne alla divisione. Al primo tra capitale e lucro toccò 15. Al 2do 40. Al terzo 75. Si cerca il Capitale di ciascuno

ciascheduno

Capitale del primo $= x$

del $2^{do} = y$

del $3^{zo} = 60 - x - y$

Composto di Capitale e tempo del primo $= x$

del $2^{do} = 2y$

del $3^{zo} = 180 - 3x - 3y$

Lucro del primo $= 15 - x$

del $2^{do} = 40 - y$

del $3^{zo} = 75 - 60 + x + y$, cioè $15 + x + y$

Ora poichè siccome i prodotti composti, così i lucri; ~~sarà~~ sarà il composto del primo al composto del 2do, come il lucro del primo al lucro del 2do; e il composto del primo al composto del terzo, come il lucro del primo al lucro del terzo. Perciò si avranno queste due proporzioni

$$x : 2y :: 15 - x : \overline{40 - y}$$

$$x : \overline{180 - 3x - 3y} :: \overline{15 - x} : \overline{15 + x + y}$$

Dalla prima si ha l'Equazione $40x - xy = 30y - 2xy$

Ovvero $40x = 30y - xy$ A

E dalla seconda

$$15x + x^2 + xy = 2700 - 225x + 3x^2 - 45y + 3xy$$

Ovvero $2x^2 + 2xy - 240x - 45y + 2700 = 0$ B

Dall'Equazione A $y = \frac{40x}{30 - x}$

sostituendo questo valore in B

$$2x^2 + \frac{80x^2}{30 - x} - 240x - \frac{1800x}{30 - x} + 2700 = 0$$

Solv

Tolto il divisore e fatte le altre necessarie riduzioni

Diviene $x^3 - 190x^2 + 5550x - 110400 = 0$

Per avere l'equazione più semplice fatto $5x = y$ si divida successivamente per 1, 5, 25, 125 i termini . . . x e ne

Si avrà $y^3 - 38y^2 + 234y - 324 = 0$

Ora si cercano i divisori omogenei 1, 2, 3, 4, e, nei quali sostituito 2 resto annullano i termini sarà $y = 2$ Cioè nell'Equazione ritrovata $x = 10$.

Il capitale dunque del primo sarà $= 10$

Del secondo espresso per $y = \frac{40x}{30-x}$ $= 20$

E sarà del terzo $= 60 - x - y$ $= 30$

quali insieme necessariamente eguagliano il comunicante 60

Problema 2.do

Data la ragione del frutto e frutto di frutto per cui un certo capitale ogni anno si aumenta e la pensione annua maggiore dell'detto frutto e di tutto il capitale, e il numero degli anni in cui il capitale si estingue determinare lo stesso capitale.

Sia x il capitale cercato, la ragione dell'aumento $1 : r$; l'annua pensione $= a$; il numero degli anni $= n$

In fine del primo anno il capitale, in ragione del lucro diviene rx, e tolta l'annua pensione $rx - a$

In fine del 2.do anno $rrx - ra - a$

In fine del 3.zo $r^3x - r^2a - ra - a$

In fine poi degli anni n diviene

$$r^n x - r^{n-1}a - r^{n-2}a - r^{n-3}a \ldots\ldots - r^{n-n}a$$

E

E perchè compiuti gli anni n rimane estinto il capitale e però diviene zero, si avrà l'equazione

$$r^n x = r^{n-1} a + r^{n-2} a + r^{n-3} a \ldots \ldots r^{n-n} a$$

Ovvero $r^n x = r^{n-1} a + r^{n-2} a + r^{n-3} a \ldots \ldots + a$

Essendo il secondo membro di questa equazione una serie geometrica, la cui somma è $\frac{ar^n - a}{r-1}$

sarà $r^n x = \frac{ar^n - a}{r-1}$ ... A

Ovvero tolto il divisore $r^{n+1} x - r^n x = ar^n - a$

E diviene $x = \frac{ar^n - a}{r^{n+1} - r^n}$ ... B

Vogliasi ora il numero degli anni $n = 3$, l'annua pensione $a = 100$, e si aumenti il capitale x nella ragione $1 : r = 1 : \frac{21}{20}$, e diverrà

$$x = \frac{9261}{8000} \times 100 - 100 : \frac{194481}{160000} - \frac{185220}{160000}$$

Ovvero $x = \frac{1261}{80} : \frac{9261}{160000}$

E risulta $x = \frac{201760000}{740880} = 272 \frac{3008}{9261}$ Capitale cercato

Scolio. Se dati il capitale $= c$, il tempo $= n$, e la ragione del frutto $1 : r$ e si cerchi l'annua pensione $a = y$, per averla si deduca il metodo dalla precedente risoluzione B, e diverrà

$$y = \frac{cr^{n+1} - cr^n}{r^n - 1} \quad C$$

Esempio. Sia il capitale $272 \frac{3008}{9261} = \frac{2522000}{9261}$, il tempo $= 3$, e la ragione del frutto $= 1 : \frac{21}{20}$

sarà $c = \frac{2522000}{9261}$, $n = 3$, $r = \frac{21}{20}$

E diviene $y = \frac{2522000}{9261} \times \frac{194481}{160000} - \frac{2522000}{9261} \times \frac{9261}{8000} : \frac{9261}{8000} - \frac{1}{1}$

Cioè $y = \frac{1790092}{109760} : \frac{1261}{8000} = 100$. Pensione cercata.

Ma se diasi il capitale $= c$, il tempo $= n$, e l'annua pensione $= a$, e si cerchi la ragione del frutto allora l'equazione (che non si deduca dalla preced.te formula B) s'innalza a quanto più cresce il tempo altrettanto maggiore di rango la di lei dimensione: talchè, posta la ragione dell'aumento $1 = z$, diverrà

$$z^{n+1} - z^n - \frac{az^n}{c} * * + \frac{a}{c} = 0. \quad D$$

Esempio. Sia il capitale $c = \frac{2522000}{9261}$; l'annua pensione $a = 100$; il tempo $n = 3$, diverrà la preced.te Equaz.e D

$$z^4 - z^3 - 100z^3 : \frac{2522000}{9261} * * + 100 : \frac{2522000}{9261} = 0 \quad E$$

E riducendo $\quad z^4 - \frac{34481z^3}{25220} * * + \frac{9261}{25220} = 0 \quad F$

Questa Equazione potrebbe trasformarsi in altra derivativa dalla cubica levando il secondo termine ecc. ma attesa la lunghezza del calcolo sarà più spediente [illegible] la radice analoga al tempo [illegible], nel caso nostro la radice terza del denominatore 9261 della Equazione E giacchè il capitale cresce aumentandosi tre volte nella ragione che si cerca. il che fatto si avrà 21 per la terza radice di 9261, e questa è il numeratore della ragione il cui denominatore facilmente si ritrova, dovendo essere prossimamente minore, imperocchè x che uguaglia una delle quattro radici dell'equazione [illegible] dal coefficiente $\frac{34481}{25220}$ del secondo termine, [illegible]

uale eguagliar alla somma delle radici; perciò, preso 20, ovvero 19 o 18 &c ne' denominatori, si sostituisca $\frac{21}{20}$ o $\frac{21}{19}$ o $\frac{21}{18}$ &c e quella che farà svanire i termini sarà la radice cercata.

Si sostituisca dunque $\frac{21}{20}$ e poichè si riducono i termini al zero, sarà la ragione cercata $x = \frac{21}{20}$.

Se per dato il capitale l'annuo frutto, e l'annua pensione, e si cerchi il tempo, questo si può determinare per le sole regole dell'Aritmetica, aumentando il capitale nella data ragione, e menomandolo per la data pensione, e sarà il tempo eguale al numero delle operazioni.

Ma perchè può nascere una lunga serie di simili operazioni, sarà bene determinar anche il tempo con metodo generale e con l'applicazione de' Logaritmi, come segue.

Sia a il capitale b il frutto annuo c la pensione maggiore di b pagabile di anno in anno.

Ora, perchè c è maggiore di b, sarà in fine del primo anno $a - c + b$.

Per il secondo anno s'inferirà, se a mi dà in frutto b, che $a - c + b$ mi darà, si trova $\frac{ab - bc + bb}{a}$, e sottraendo questo frutto dalla pensione c, si avrà $c - \frac{ab + bc - bb}{a}$, ovvero $\frac{ac - ab + bc - b^2}{a}$; il qual residuo sottratto altresì da $a - c + b$, capitale del secondo anno, avremo $\frac{a^2 - 2ac + 2ab - bc + b^2}{a}$.

Procedendo con questo metodo, ritroveremo la diminuzione di capitale alla fine nel terzo anno $\frac{a^2c - a^2b + 2abc - 2ab^2 + b^2c - b^3}{a^2} =$

$= c - b \times \frac{\overline{a+b}^2}{a^2}$ [illegible]

Nel quarto anno sarà $\frac{a^3c - a^3b + 3a^2bc - 3a^2b^2 + 3ab^2c - 3ab^3 + b^3c - b^4}{a^3}$

$= c - b \times \frac{\overline{a+b}^3}{a^3}$.

E così negli anni susseguenti, perciò se si dica x il tempo cercato, sarà la diminuzione di capitale nell'anno x $c - b \times \frac{\overline{a+b}^{x-1}}{a^{x-1}}$.

Le diminuzioni dunque del capitale saranno così espresse:

$c-b \cdot c-b\times\frac{a+b}{a} \cdot c-b\times\frac{\overline{a+b}^2}{a^2} \cdot c-b\times\frac{\overline{a+b}^3}{a^3} \dots c-b\times\frac{\overline{a+b}^{x-1}}{a^{x-1}}$, le quali formano una serie geometrica crescente in ragione di a ad $a+b$.

Ma la somma di tutti i termini di una serie geometrica meno l'ultimo è alla somma di tutti i termini meno il primo nella medesima ragione della serie.

Dunque chiamando s la somma di tutti i termini, p il primo termine, u l'ultimo.

Sarà $s - u : s - p :: a : a+b$

Moltiplicando gli estremi e i medj

Si avrà $sa + sb - au - bu = sa - ap$ ovvero $sb - au - bu = -ap$

E dividendo per b, $s = \frac{\overline{a+b} \times u - ap}{b}$

Sostituendo i valori di p ed u, nel caso nostro $s = \frac{c-b}{ba^{x-1}} \times \overline{a+b}^x - \frac{ac}{b} + a$.

Questa è la somma delle diminuzioni del capitale fatte nel tempo x; ma poichè in fine di detto tempo esse sono

sono nei ipotesi eguali al capitale medesimo.

Dunque eguagliando $\frac{\overline{c-b}\times\overline{a+b}^x}{ba^{x-1}} - \frac{ac}{b} + a = a$.

Ovvero tolto a da una parte, e dall'altra, e ragionando di $\frac{ac}{b}$ diviene $\frac{\overline{c-b}\times\overline{a+b}^x}{ba^{x-1}} = \frac{ac}{b}$.

E levate le frazioni $\overline{c-b}\times\overline{a+b}^x = ca^x$.

Dopo tutto ciò, per ritrovare il valore di x, ci serviremo dei Logaritmi.

E il Log di $\overline{c-b}\times\overline{a+b}^x = \log.\overline{c-b} + x\cdot\log.\overline{a+b}$.

E il Log di ca^x = il $\log c + x\cdot\log a$.

Dunque $\log.\overline{c-b} + x\cdot\log.\overline{a+b} = \log.c + x\cdot\log.a$.

Ovvero $x\cdot\log.\overline{a+b} - x\cdot\log.a = \log.c - \log.\overline{c-b}$

E diviene $x = \frac{\log c - \log \overline{c-b}}{\log \overline{a+b} - \log a}$ A

Esempio. Sia il dato capitale $= 272 + \frac{3008}{9261}$, ovvero $\frac{2522000}{9261} = a$; l'annuo frutto $= \frac{126100}{9261} = b$; e la pensione annua $= 100 = c$; e il tempo cercato $= x$.

Si avrà dunque giusta la formula A

$$x = \frac{L.\ 2.0000000 - L.\ 1.9364321}{L.\ 2.4562705 - L.\ 2.4350872} = \frac{0.0635679}{0.0211893}$$

Cioè $x = \frac{635679}{211893} = 3$

Tutto questo calcolo si è fatto, nel supposto, che gli anni correnti per estinguere il capitale siano interi, come di fatto in questo esempio dovea essere, ma se oltre un dato numero di anni interi vi volesse una porzione dell'anno, ri- quanto allora converrebbe generare con questo metodo [illegible] uguale [illegible] n il numero intero degli anni [illegible]

li siano si stati ritrovati operando come si è detto. Allo-
ra la diminuzione del capitale a negli anni n

sarà $\frac{\overline{c-b}\times\overline{a+b}^n}{ba^{n-1}} - \frac{ac}{b} + a$.

Perciò in fine degli anni predetti rimarrà il capitale

$$\frac{ac}{b} - \frac{\overline{c-b}\times\overline{a+b}^n}{ba^{n-1}}$$

Si dica y la porzione dell'anno, che si cerca. Perchè dunque il capitale a ha b di pro in un anno il capitale $\frac{ac}{b} - \frac{\overline{c-b}\times\overline{a+b}^n}{ba^{n-1}}$ in tempo y avrà $cy - \frac{\overline{c-b}\times\overline{a+b}^n}{a^n}\times y$ (usando la regola del pro composto) di pro, parimente

Ma questo pro unito al suo capitale deve agguagliarsi alla somma, che per il tempo y è pagabile, cioè se per un anno la somma è c, per la porzione y di un anno dovrà essere la somma cy

$$[illegible] \frac{ac}{b} - \frac{\overline{c-b}\times\overline{a+b}^n}{ba^{n-1}} + cy - \overline{c-b}\times\overline{a+b}^n\times y$$

Ovvero $\frac{ac}{b} - \frac{\overline{c-b}\times\overline{a+b}^n}{ba^{n-1}} = \frac{\overline{c-b}\times\overline{a+b}^n\times y}{a^n}$

E moltiplicando per a^n

$$\frac{ca^{n+1}}{b} - \frac{\overline{c-b}\times\overline{a+b}^n\times a}{b} = \overline{c-b}\times\overline{a+b}^n\times y$$

E dividendo per $\overline{c-b}\times\overline{a+b}^n$.

Diviene $\frac{ca^{n+1}}{b\times\overline{c-b}\times\overline{a+b}^n} - \frac{a}{b} = y$ Ciò che ecc.

Si applichi ora questa risoluzione universale ad un caso particolare; e sia per esempio il capitale a = 150, l'annuo pro b = 10 (a ragione di $6\frac{2}{3}$ per 100) la quantità pagabile di anno in anno c = 50.

Per avere dunque gli anni interi x si dee prima applica-
re

ve la precedente formula A.

Essendo dunque il log di $c = 1.6989700$, il log. di $c-b = 1.6020600$, il log. di $a+b = 2.2041200$, e il log di $a = 2.1760913$, sarà per conseguenza

$$x = \frac{1.6989700 - 1.6020600}{2.2041200 - 2.1760913} = \frac{969100}{280287} = 3$$

Cioè il numero x degli anni intieri sarà 3 con un residuo $\frac{128239}{280287}$, che non si cura [illegible]

Sostituendo dunque la porzione y dell'anno susseguente, si sostituisca il numero x ritrovato 3 nella ritrovata formula, sarà $y = \frac{ca^4}{b\times c - b\times a + b^3} - \frac{a}{b}$.

Cioè sostituiti i numeri dati, avremo

$$y = \frac{50 \times 506250000}{10 \times 40 \times 4096000} - \frac{150}{10} = \frac{7365}{15384}$$

si estinguerà dunque il dato capitale in anni $3 + \frac{7365}{10384}$

Se cercasi poi quanto si dovrà esborsare di pensione per l'ultimo pagamento, è chiaro, che questa sarà proporzionale alla ritrovata porzione di anno $\frac{7365}{15384}$, onde si farà come $15384 : 7365 :: 50$: annua pensione al 4to termine $22 + \frac{3901}{8192}$.

Prova.

In fine del primo anno, diviene il capitale $150 + 10 - 50 = 110$.

II. $\frac{16}{15} \times \frac{110}{1} - 50 = \frac{16}{3} \times \frac{22}{1} - \frac{50}{1} = \frac{352}{3} - \frac{150}{3} = \frac{202}{3}$

III. $\frac{16}{15} \times \frac{202}{3} - \frac{50}{1} = \frac{3232}{45} - \frac{2250}{45} = \frac{982}{45}$

IV Per la regola di proporzione composta, s'inferisce se il capitale 150 in anni 1 mi dà un pro 10, quanto mi 15 in anni 3 mi

dà

un pro 1, il capitale $\frac{942}{45}$ in tempo $\frac{7305}{16384}$. ovvero $\frac{[illegible]}{[illegible]}$

mi darà dunque $1 + \frac{175545}{368640}$, il qual pro aggiunto al capita-

le $\frac{942}{45}$, dà $22 + \frac{7802}{16384}$, ovvero $22 + \frac{3901}{8192} = cy$.

Problema 3^{zo}.

Un capitale si aumenta in ragione di $1 : \frac{21}{20}$, e nello spazio di 4 anni il frutto diviene 1000 si cerca il capitale.

Sia $1 : \frac{21}{20} = 1 : y$; il frutto $1000 = a$, il capitale $= x$

Sarà dunque

In fine del primo anno yx

del 2do y^2x

del 3^{zo} y^3x

del 4to y^4x

Dunque il capitale dopo 4 anni sarà y^4x

Ma il frutto, per supposto, è $= a$.

Dunque $y^4x - x = a$

E dividendo $x = \frac{a}{y^4 - 1}$ cioè sostituendo $= \frac{160000000}{34481}$

Problema 4to.

Dato il capitale e il frutto, e dato il tempo, ritrovare la ragione dell'aumento, o del frutto

Sia 1000 il capitale il frutto $464\frac{1}{10}$ il tempo 4, e la ragione dell'aumento ricercata sia $1 : x$

Diverrà dunque il capitale in fine del 4to anno $= 1000x^4$.

Dunque $1000x^4 - 1000 = 464\frac{1}{10}$

E riducendo $x^4 = \frac{14641}{10000}$

E riducendo $x = \sqrt[4]{\frac{14641}{10000}} = \frac{11}{10}$

Perciò la ragione $1 : x = 1 : \frac{11}{10}$.

L'aumento dunque il capitale in ragione di 10 . 11, e tale è la ragione del frutto, che sarebbe il 10, ovvero $\frac{1}{10}$ per 100.

Viceversalmente

Sia il capitale $1000 = a$ il frutto $464.1 = b$, anni $4 = n$, e la ragione cercata, cognita $= 1 : x$

Sarà il capitale in fine degli anni $n = a x^n$.

Sia il capitale col frutto di questo tempo è $1000 + 464.1 = a + b$.

Dunque l'equazione $a x^n = a + b$

E diviene $x^n = \frac{a+b}{a}$ A

Ed estraendo la radice n

si avrà $x = \sqrt[n]{\frac{a+b}{a}}$ B

Cioè sostituiti i numeri

$$x = \sqrt[4]{\frac{14641}{10000}} = \frac{11}{10} \text{ come sopra}$$

Scolio

Ma simili problemi si risolvono molto più speditamente coi logaritmi. Imperocchè trovata l'equazione A e applicati i Logaritmi si avrà

$$4 L x = L \overline{a+b} - L a$$

E dividendo per 4,

$$L x = \frac{L \overline{a+b} - L a}{4}$$

Ma il log di $\overline{a+b} = 3.1655707$ e log di $a = 3.0000000$.

Dun.

Dunque $Lx = L\,3.1041392\overline{7} - L\,3.0000000$

Cioè $x = 0.0413927$

Trovo, perchè $x = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

si avrà $\frac{x+1}{x} = 0.0413927$

E aggiunto a 0.0413927 il log. di qualche altro numero p. esempio, 3.0000000, log di 1000, diviene 3.0413927 a cui corrisponde il numero 1100, il quale diviso p. 1000 ... aggiunto.

Diviene $\frac{x+1}{x} = \frac{11}{10}$ come ...

Problema 5to

Un capitale si aumenta in ragione di 1 : r. Si cerca il tempo, in cui il capitale dato C diviene mC.

Sia x il tempo cercato

Sarà dunque il capitale C si aumenta in ragione di 1 : r si verrà

in fine del primo anno $= rC$

del 2do $= r^2C$

del 3zo $= r^3C$

del 4to ... $= r^4C$

Dunque nell' anno x, $= r^xC$

Ma per ipotesi che uguagliano alla quantità mC

Si avrà dunque l'equazione $r^xC = mC$. A.

E dividendo per C da una parte, e dall' altra

diviene $r^x = m$ B

... dunque innalzare la ragione r alla potenza che sia eguale ad m

Scolio primo.

Ma più speditamente per i logaritmi.

Imperocchè si avrà $x\,L\,r = L\,m$

E dividendo per $L\,r$, diviene $x = \frac{L\,m}{L\,r}$

Suppongasi ora che il capitale debba divenire doppio e l'aumento sia come 20 : 21.

Sarà il tempo cercato $x = \frac{L\,2}{L\,21 - L\,20}$

E se debba divenire triplo sarà $x = \frac{L\,3}{L\,21 - L\,20}$

I tempi dunque sono come i log. degli esponenti.

Ora log. di 2 = 0.3010300 log di 21 = 1.3222193.

log. di 20. = 1.3010300. dunque log di 21 - log di 20 = 0.0211893.

Dunque $x = \frac{0.3010300}{0.0211893} = \frac{3010300}{211893} = 14 + \frac{43798}{211893}$.

Qualunque capitale dunque in ragione di 20 : 21 diverrà doppio in anni $14 + \frac{43798}{211893}$ attesa la ragione del frutto e frutto di frutto.

Scolio 2do.

Ma per determinare il tempo nel caso di qualunque data quantità, si dovrà operare in prima giusto l'applicazione della formula A.

Esempio. Sia dato il capitale 1000 = C; la ragione dell'aumento $\frac{21}{20} = r$, la quantità a cui deve ascendere il capitale col detto aumento $= 1157\frac{5}{8}$, ovv.° $\frac{9261}{8} = mC$ se il tempo cercato si dica x, avremo giusta a pre-

dett.

Detta formula:

$$\left(\frac{21}{20}\right)^x 1000 = \frac{9261}{8}$$

E dividendo per 1000

$$\left(\frac{21}{20}\right)^x = \frac{9261}{8} : \frac{1000}{1} = \frac{9261}{8000}$$

E applicati logaritmi $x \log 21 - x \log 20 = \log 9261 - \log 8000$

E diviene $x = \frac{\log 9261 - \log 8000}{\log 21 - \log 20}$

Cioè sostituiti i numeri logaritmici:

$$x = \frac{3.9666579 - 3.9030900}{1.3222193 - 1.3010300} = \frac{0.0635679}{0.0211893} = \frac{635679}{211893} = 3$$

Scolio 3°.

Ove se dia il frutto di tutto il tempo separato dal capitale, divi... questo a quello aggiungersi indi si operi col medesimo metodo

Problema 6°.

Dato il capitale $= a$ la ragione dell'aumento annuo $1 : r$ e il tempo $= n$. Determinare quanto monterà il detto capitale con i suoi frutti, e frutti di frutti in questo tempo.

Sia la quantità cercata, dica x

Si avrà $x = a r^n$

Imperocchè, se $n = 2$, diverrà in fine del primo anno $= r^{n-2}_{1+?}$

In fine del 2do $= r^{n-1}.a$
In fine del 3zo $= r^{n}.a$

E applicati i logaritmi giusta la seconda formula si
si avrà $Lx = nL21 - nL20 + La$
Ovvero $Lx = n \times \overline{L21 - L20} + La$

E sostituiti i numeri logaritmici, posto $a = 1000$, la ra-
gione $r = \frac{21}{20}$ e il tempo $n = 3$ come sopra. Si avrà

$Lx = 3 \times 0.0211893 + 3.0000000$

Ovvero $Lx = 0.0635679 + 3.0000000$

Cioè $Lx = 3.0635679$ a cui corrisponde il
numero $1157 + \frac{2345}{3762}$

Quindi $x = 1157 + \frac{2345}{3762} = 1157.625$

Scolio.

Ma se oltre li tre anni interi nell'esempio accen-
nato vi fosse ancora una frazione di anno cioè per Esem-
pio gni 17, ovvero 107 gni in tal caso si deve trovare l'aumen-
to, ossia la ragione secondo cui dovrebbe crescere il capita-
le in questa frazione di anno, perciò diviso l'anno in 365
giorni, così la ragione in cui aumentandosi 20 in
365 giorni diviene 21 giacchè in un anno 20 diviene 21
Sia dunque l'aumento giornaliero in denaro $\frac{1}{y}$, sarà la ra-
gione dell'aumento $1 + \frac{1}{y}$ ossia $\frac{y+1}{y}$, e però l'equazione

$$20.\left(\frac{y+1}{y}\right)^{365} = 21$$

E dividendo per 20 $\left(\frac{y+1}{y}\right)^{365} = \frac{21}{20}$

E

Algebra Version XVIII.

E alzando alla potenza $\frac{1}{365}$, cioè estraendo a radice 365ª avremo dunque

$$\frac{y+1}{y} = \left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{1}{365}}$$

Applicati i logaritmi

$$L\,\frac{y+1}{y} = \frac{1}{365} \times L\left(\frac{21}{20}\right)$$

$= \frac{1}{365} \times 0.0211893 = 0.0000581$ (a cui aggiunto il logaritmo di 5000, per l'ineguaglianza dei logaritmi, indi dividendo il nº corrispondente per 5000)

E diviene $\frac{y+1}{y} = \frac{4345581}{4345000}$; ragione cercata.

Ma $\frac{y+1}{y} = 1 + \frac{1}{y}$; perciò $\frac{1}{y} = \frac{581}{4345000}$ aumento giornaliero.

Ora per la quantità cercata a cui dica ancora a, prendendo la quantità trovata 1157.625 per i giorni 167 e dica z, avremo

$$1157.625 \cdot \left(\frac{4345581}{4345000}\right)^{167} = z$$

Ovvero $\left(\frac{1157625}{1000}\right) \cdot \left(\frac{4345581}{4345000}\right)^{167} = z$

E applicati i logaritmi

$$L\left(\frac{1157625}{1000}\right) + 167 \cdot L\left(\frac{4345581}{4345000}\right) = L\,z$$

Cioè $3.0635679 + 167 \times 0.0000580 = L\,z$

Av.º $3.0635679 + 0.0096860 = L\,z$

E diviene $L\,z = 3.0732539$ a cui risponde il numero $1183 + \frac{2692}{3070}$. Altanto dunque ascende il dato capitale 1000 nel tempo proposto.

f.c.

Problema 7mo.

Si comprano tre generi di merci e in tutto sono 13 oncie. L'oncia della 2da merce vale 10 scudi più che la 1ma, e l'oncia della terza vale 10 scudi più che la 2da. Si spende poi in ciascun genere di dette merci scudi 120. Si cercano le oncie di ciascun genere di dette merci, e il valore di un'oncia.

Siano le oncie della prima merce $= y$

le oncie della 2da " $= z$

Dunque della 3za " $= 13 - y - z$

Prezzo dell'oncia della 1ma merce $= x$

della 2da " $= x + 10$

della 3za " $= x + 20$

Prezzo totale di tutta la 1ma merce $= xy$ A

Prezzo della 2da " $= xz + 10z$ B

Prezzo della 3za $= 13x - xy - xz + 260 - 20y - 20z$ C

Ma per l'ipotesi $xy = 120$ A

Dunque dividendo per x $y = \frac{120}{x}$ A

Di nuovo $xz + 10z = 120$ B

Dunque dividendo pel coefficiente di z

Si ha $z = \frac{120}{x+10}$ B

Sostituendo questi valori di A, e B in C, che parimenti eguagliasi a 120.

Si avrà l'Equazione $13x^3 + 30x^2 - 4600x - 24000 = 0$

Per ridurla a termini più semplici, si dividano le radici per ÷ 1, 10, 100, 1000, fatto $x = 10u$

E

E sarà $13u^3 + 3u^2 - 46u - 24 = 0$

si sostituiscano i divisori dell'omogeneo 1, 2, 3, 4 &c, e poichè sostituito 2. tutti svaniscono i termini, sarà $u = 2$; perciò $x = 20$.

Dunque il prezzo dell'oncia della prima merce è 20 scudi; d'onde si trova, che l'oncia della 2.da merce va 30 scudi; e l'oncia della 3.za 40. Essendo poi $xy = 120$, ovvero $y = \frac{120}{x}$, sarà $y = 6$ oncie della prima merce, e perchè similmente $z = \frac{120}{x+10}$, sarà $z = 4$ oncie della seconda merce; e però $13 - y - z = 3$ oncie della terza merce.

Problema 4.to

A Uomini 100. di tre classi si devono distribuire 750 scudi per classe, con tal legge, che ciascuno della seconda classe abbia 10. scudi più che ciascuno della prima, e ciascuno della terza abbia scudi $12\frac{1}{2}$ più che ciascuno della seconda. Si cercano gli individui componenti ciascheduna classe, e quanto riceverà ciascuno di ciascheduna classe.

Numero degli individui della prima classe $= y$, della seconda $= z$, della terza $= 100 - y - z$.

Stipendio cercato di ciascun individuo della prima classe $= x$; dunque stipendio di ciascuno della seconda $= x + 10$, e però di ciascuno della terza $= x + 22\frac{1}{2}$, ovvero $= \frac{2x+45}{2}$.

Stipendio di tutta la prima classe $= xy$, di tutta la seconda $\overline{x+10} \times z$; di tutta la terza $\frac{\overline{100-y-z}}{1} \times \frac{\overline{2x+45}}{2}$.

cioè

cioè $\frac{200x - 2xy - 2xz + 4500 - 45y - 45z}{2}$

Ma questa quantità, per l'ipotesi, deve agguagliare 750

Dunque $\frac{200x - 2xy - 2xz + 4500 - 45y - 45z}{2} = 750$

Cioè levato il divisore

$$200x - 2xy - 2xz + 4500 - 45y - 45z = 1500 \quad A$$

E' noto dall'ipotesi ancora $xy = 750$, e però $y = \frac{750}{x}$.

Sostituito questo valore in A sarà

$$200x - 1500 - 2xz + 4500 - \frac{33750}{x} - 45z = 1500$$

Ridotti i termini simili a un sol termine, e levato il divisore, diviene:

$$200x^2 - 2x^2z + 1500x - 45xz = 33750 \quad B$$

E' anche, dall'ipotesi parimenti $(x+10)z = 750$, e però $z = \frac{750}{x+10}$.

Sostituito questo valore in B sarà

$$200x^2 - \frac{1500x^2}{x+10} - \frac{33750x}{x+10} + 1500x = 33750$$

E levato il divisore $x+10$ sarà

$$200x^3 + 2000x^2 + 1500x^2 + 15000x - 1500x^2 - 33750x = 33750x + 337500$$

Cioè riducendo i termini simili a un sol termine, e ordinando l'equazione

$$200x^3 + 2000x^2 - 52500x - 337500 = 0$$

Dividendo per 200, coefficiente della massima incognita, ed abbassati i termini frazionari, risulta

$$x^3 + 10x^2 - \frac{525x}{2} - \frac{3375}{2} = 0$$

Risoluzione.

Levate le frazioni, fatto $2x = y$, e moltiplicato per 1, 2, 4, 8, e diverrà

y^3

$$y^3 + 20y^2 - 1050y - 13500 = 0$$

E dividendo per ÷ 1, 5, 25, 125, posto $y = 5z$

si avrà $$z^3 + 4z^2 - 42z - 108 = 0$$

Col metodo de' divisori si trova $z = 6$, d'onde si deduce $x = 15$.

Ma volendo togliere il secondo termine per risolverlo col metodo generale, fatto $z = u - \frac{4}{3}$ ovvero $= \frac{3u-4}{3}$ la prodotta Equazione si trasforma in questa

$$27u^3 \ldots * - 1278u - 1276 = 0$$

E dividendo per 27 $$u^3 \ldots * - \frac{1278u}{27} - \frac{1276}{27} = 0$$

Per togliere le frazioni, posto $3u = w$ si moltiplichi per ÷ 1, 3, 9, 27.

E si avrà $$w^3 \ldots * - \frac{1278w}{3} - 1276 = 0$$

Cioè $$w^3 \ldots * - 426w - 1276 = 0 \quad B$$

Ora sottraendo il coefficiente 426 da qualche numero quadrato maggiore come da 484 e pel residuo 58 dividendo l'omogeneo 1276, risulta il quoto 22, il quale sostituito nell'Equazione B, riduce i termini al zero; perciò 22 è radice della stessa equazione B.

Essendo poi $u : w :: 1 : 3$; sarà $u = \frac{22}{3}$ ovvero $= 7\frac{1}{3}$; e perchè $z = u - \frac{4}{3}$, sarà $z = \frac{22}{3} - \frac{4}{3} = 6$.

Ma $y : z :: 5 : 1$; dunque $y = 5 \times 6 = 30$; perciò dividendo $y = 30$ per 2, si trova $x = 15$ radice cercata.

Prova

Tre uomini cerca una cassa = 50

della 2da = 30

della 3za = 20

somma = 100

Rispondo di ciascun uomo della prima = 15

della 2da = 25

della 3za = $37\frac{1}{2}$

Quindi

$50 \times 15 = 750$

$30 \times 25 = 750$

$20 \times 37\frac{1}{2} = 750$

Come fu proposto.

Problema Nono

Due mobili si partono dal medesimo punto e in una stessa [illegible] ma si muovono in diversi tempi. Il primo percorre spazj che sono come i quadrati de' tempi; il [illegible] come [illegible] [illegible] moto [illegible] [illegible] [illegible] tempo 4 prima del secondo. Si cerca il tempo del loro concorso.

Sia x il tempo cercato.

Dunque lo spazio percorso dal primo in tempo 4 è = 16, e lo spazio che deve percorrere in tempo $4 + x$ = 16 $+ 4x + x^2$

[illegible]

spazio, che deve percorrere il secondo in tempo x $= x^3$; essendo [illegible] medesimo [illegible]

Dunque eguagliando si avrà l'equazione

$$x^3 = 16 + 8x + x^2$$

Ovvero $x^3 - x^2 - 8x - 16 = 0$

Si moltiplichino i termini per $3, 2, 1, 0,$ e

si avrà per prima equazione de' limiti

$$3x^2 - 2x - 8 = 0$$

Si moltiplichi di nuovo questa Equazione per $2, 1,$ 0 e avrà la seconda equazione de' limiti $6x - 2 = 0$.

Si sostituiscano giusto il Metodo Newtoniano $1, 2, 3$ successivamente in ciascuna Equazione e poichè nessuno di questi dà il segno affermativo in tutte le tre scritte Equazioni niuno di questi può esser limite. Sia sostituito 4 svaniscono i termini nella cubica, ossia 4 è radice della medesima Equazione. Il loro concorso dunque riuscirà in detto tempo, cioè nel tempo 4 cominciando dal primo movimento del primo Mobile.

Scolio.

Se universalmente si chiami il tempo dato $=$ a, e il tempo cercato $= x$, sarà l'equazione

$$x^3 = x^2 + 2ax + a^2$$

Per esser dunque razionale la radice è necessario, che il cubo eguagli il quadrato. E poichè tutti i numeri quadro-cubi sono altresì quadrati se $a + x$ sia il lato, sa

Dra

drato-cubico, sarà sempre irrazionale, ecc. ecc.

Donde ne risulta il metodo di ritrovare nelle ragioni infinite [illegible], in cui si muove solitario il secondo mobile.

Imperocchè sia per esempio, $x^3 = 729$

Si ricaverà $x = 9$

E $x + a = \sqrt{729} = 27$; perciò $a = 18$.

È necessario dunque, in questa ipotesi, che il tempo precedente sia $= 18$

Problema decimo [illegible]

Siano ora i spazj del primo come i quadrati, e quelli del secondo come i sopraccubi. E sia il tempo precedente 28. Col medesimo metodo sarà [illegible] l'Equazione $x^5 = x^2 + 56x + 784$

Ovvero $x^5 - x^2 - 56x - 784 = 0$

Si cerchino i limiti, e si avranno le loro equazioni

I. $5x^4 - 2x - 56 = 0$ [illegible]

II. $20x^3 - 2 = 0$

Cioè $20x - 2 = 0$ [illegible]

sostituito 1, questo non diviene limite, nè 2 nè 3; nessuno di questi dà i segni alternativi in tutte le quattro medesime equazioni. così fatto poi 4 nell'equazione svaniscono i termini. Perciò 4 sarà radice della stessa Equazione; e dopo il tempo 4 il secondo mobile raggiungerà il primo. Computando poi dall'Epoca in cui incominciò a muoversi il primo, si avrà il concorso in tempo 32

Pro

Problema Undecimo.

Un mobile percorre certi spazj come le potenze de' tempi: Un altro, in serie Aritmetica la cui differenza è 18. Il primo spazio è eguale, e dopo quattro tempi si trovano parimenti eguali. Si cerca la misura di questo spazio

Poichè dopo quattro tempi è ancora eguale lo spazio, il primo si percorrerà nei quattro termini secondo le potenze de' tempi; però, posto eguale ad x lo spazio ricercato, sarà lo spazio percorso dal primo

$$x + x^2 + x^3 + x^4$$

spazio del 2do $\quad 4x + 108$

Imperocchè supposto il primo spazio eguale all'unità $= 1$ la somma di quattro termini della serie Aritmetica il cui primo termine $= 1$, e la differenza $= 18$, sarà 112, da cui tolti i quattro primi eguali (dall'ipotesi) all'unità resta 108; e posto x invece, nella stessa ipotesi $= 1$, sarà l'unità quattro volte presa $= 4x$; e però 112 diviene $= 4x + 108$

Eguagliando dunque lo spazio primo al secondo

si avrà $\quad x^4+x^3+x^2+x = 4x+108$

Ovvero $\quad x^4+x^3+x^2-3x-108 = 0 \,.\, A$

Si cerchino le equazioni de' limiti e saranno

I. $\quad 4x^3+3x^2+2x-3 = 0$

II. $\quad 12x^2+6x+2 = 0$

III. $\quad 24x+6 = 0$

Ora sostituito 1 non si trova altro limite nè similmente 2. Ma sostituito 3. nella data A svaniscono i termini

Var.

[illegible] 3 è radice della stessa Equazione [illegible]
[illegible] consista in togliere la radice [illegible] 3 [illegible] e poichè il tempo è analogo allo spazio si conchiuderà [illegible] il tempo del [illegible] sarà [illegible] di 3 [illegible]

Problema Duodecimo.

La forza di un primo agente decresna come i quadrati delle distanze dal centro. La forza del secondo agente, come i cubi. La forza del terzo, come [illegible] +2. Cercasi un punto in cui la somma delle forze del primo, e del terzo [illegible] alla forza del secondo come 4 a 1.

Sia x lo spazio cercato che ne determina il punto, sarà dunque la [illegible] forza $= \frac{1}{xx}$ la seconda $= \frac{1}{x^3}$ e la terza $= \frac{1}{x+2}$.

Si avrà dunque

$$\frac{1}{xx} + \frac{1}{x+2} : \frac{1}{x^3} :: 4 : 1$$

Cioè $\frac{1}{xx} + \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^3}$

[illegible] levate le frazioni

$$x^4 + 2x^3 + x^3 = 4x^3 + 8x^2$$

Cioè $x^5 + x^4 - 2x^3 - 4x^2 = 0$

[illegible] dividendo per x^2

si viene $x^3 + x^2 - 2x - 4 = 0$ A [illegible]

Si cerchino i limiti, e saranno le loro Equazioni:

I. $3x^2 + 2x - 2 = 0$ [illegible]

II. $6x + 2 = 0$

Ma sostituito 1 non diviene [illegible] ma sostituito 2 nella data [illegible] dunque 2 è radice della [illegible]

medesima Equazione. Le due rimanenti sono imaginarie.

Sia la [illegible] radice ritrovata [illegible] fatta la costruzione come sopra diverrà l'Equazione

$$x^3 + x^2 - 3x - 10 = 0$$

di cui radice reale è sorda cioè tra 2 e 3. Le rimanenti sono immaginarie.

Restringendo i limiti 2, e 3 questo la formola [illegible] si avrà la radice approssimata a piacere.

Problema Decimo-terzo.

Da un Doglio capace di 40 Misure furono estratte più volte tante misure con certo vaso, perchè [illegible] ciascuna estrazione cinque misure di vino e [illegible] infusa acqua alla medesima altezza si trovò essere nel Doglio misure $20\frac{7}{10}$ di vino. Si cerca la capacità del detto vaso.

Costruzione

Sia x numero delle misure, di cui è capace il detto vaso.

Dunque dopo la prima estrazione, sarà nel Doglio vino misure $40 - x$ e aggiunte 5 misure di vino avrà $40 - x + 5$, ovvero $45 - x$ [illegible]

Perchè [illegible] infusa l'acqua [illegible] ragione del vino alla acqua deve essere la medesima che [illegible] e perchè ancora la quantità di vino nel Doglio alla quantità del vino nel vaso è nella stessa ragione, in cui la quantità dell'acqua nel Doglio sta alla di lei quan-

tità

sta nel vaso cioè come la capacità del doglio alla capacità del vaso, ed aver dunque la quantità del vino che dee uscire nella seconda estrazione s'imposta siccome 40, capacità del doglio, ad x capacità del vaso, così 40−x, quantità di vino precedentemente determinata, al 4to termine, il quale diverrà $\frac{45x - x^2}{40}$.

Dunque la quantità del vino residuo nel doglio sarà

$$45 - x - \frac{45x + x^2}{40}$$

E aggiunte le proposte 5 misure di vino, diviene

$$50 - x - \frac{45x + x^2}{40}, \text{ ovvero } \frac{2000 - 85x + x^2}{40}$$

Inoltre l'acqua alla medesima altezza per determinare la quantità di vino che dee uscire nella terza estrazione, col medesimo metodo s'imposta siccome 40 capacità del doglio ad x capacità del vaso con $\frac{2000 - 85x + x^2}{40}$ al 4to termine, il quale diverrà

$$\frac{2000x - 85x^2 + x^3}{1600}$$

Sarà dunque la quantità del vino residuo nel doglio

$$\frac{2000 - 85x + x^2}{40} - \frac{2000x - 85x^2 + x^3}{1600}$$

Aggiuntevi le proposte 5 misure di vino e ridotto il tutto al medesimo conseguente

$$\frac{320000 + 3200000 - 136000x + 1600x^2 - 80000x + 3400x^2 - 40x^3}{64000}$$

Raccolti i termini simili in un sol termine, e dividendo per 40

Diviene $$\frac{88000 - 5400x + 125x^2 - x^3}{1600}$$

Ma questa quantità per altra condizione del problema, dee agguagliare misure $28\frac{7}{16}$ cioè $\frac{455}{16}$ di vino

ne:

doglio rimasto dopo la terza estrazione, ed a fianco della vasca dall'acqua alla medesima altezza

Dunque $\frac{88000 - 5400x + 125x^2 - x^3}{1600} = \frac{455}{16}$

Cioè eliminati i divisori [illegible]

$$1408000 - 86400x + 2000x^2 - 16x^3 = 728000$$

Cambiati i segni, riducendo, e ordinati i termini

$$16x^3 - 2000x^2 + 86400x - 680000 = 0$$

[illegible] coefficiente della massima incognita resta la equazione

$$x^3 - 125x^2 + 5400x - 42500 = 0 \quad A$$

Risoluzione

Fatto $x = 5y$, si divide l'equazione A per la serie $\div 1, 5, 25, 125$; resa la trasformata

$$y^3 - 25y^2 + 216y - 340 = 0 \quad B$$

La quale risolta col metodo de' divisori si trova $y = 2$ e però $x = 10$. Capacità del vaso ricercata.

Problema Decimottavo.

Da una Botte si estraggono 10 misure di vino e si infondono 10 di acqua; di nuovo si estraggono 15 misure di liquor misto, e si rimettono 15 misure d'acqua; finalmente si estraggono 20 misure di questo secondo misto e si rimettono 20 misure di acqua; si trova che nella mistura il vino sta all'acqua come 5 a 7. Si cerca la capacità della Botte

Costruzione

Sia x la quantità delle misure che conteneva la Botte. Dunque estratte 10 misure di vino rimasero 10 misure [illegible]

d'acqua sarà il vino all'acqua nella Botte come $x-10$ a 10.

Si dividano ora le 15 [illegible] che di nuovo devono estrarsi nella medesima ragione, dicendo chiamando b la parte del vino che deve uscire, e q la parte dell'acqua si avrà

$$b+q=15 \quad \ldots \quad A$$

$$b : q :: x-10 : 10 \quad \ldots \quad B$$

Fatta la trasposizione in A e ridotta in Equazione la proporzione B, sarà

$$b=15-q \quad \ldots \quad A$$

$$10\,b = xq-10q \quad \ldots \quad B$$

Moltiplicando l'Equazione A per 10 si ha

$$10\,b = 150-10q \quad \ldots \quad A$$

Sostituito il valore di questa Equazione A nella precedente B si avrà

$$xq-10q=150-10q$$

Trasponendo $\quad xq=150$

Donde $\quad q=\frac{150}{x}$ quantità dell'acqua che deve uscire [illegible]

Quindi $\quad b=15-\frac{150}{x}$ sarà la quantità del vino

Ora dal vino rimasto nella Botte sottratta la porzione del vino, che di nuovo deve estrarsi, si avrà:

$$x-10-15+\frac{150}{x}$$

Ovvero riducendo sotto il medesimo denominatore

$$\frac{x^2-10x-15x+150}{x}$$

Ovvero $\quad \frac{x^2-25x+150}{x}$

C

Questa è la quantità del vino che rimane nella Botte dopo l'estrazione delle dette 15. misure di liquor misto.

Sottraggasi di nuovo la porzione sopra ritrovata dell'acqua dal ~~primo cambio dell'acqua~~ uscita dall'acqua infusa nella prima rimessa, e sarà

$$10 - \frac{150}{x} \text{ ovv.° } \frac{10x - 150}{x}$$

Aggiunta a questa quantità l'acqua della seconda infusione, diverrà

$$\frac{10x - 150}{x} + 15 \text{ ovv.° } \frac{25x - 150}{x}$$

E questa è la quantità dell'acqua nella Botte dopo aver aggiunte le 15. misure di acqua.

Perchè poi di nuovo debbono estrarsi 20 misure di liquor misto, conviene di nuovo dividerle nella suddetta ragione col metodo praticato; per ciò:

Per la prima cond.e ... $b + Q = 20$ ... A

E per la 2da: $b : Q :: x^2 - 25x + 150 : 25x - 150$ ... B

(Si trascura il divisore x per esser comune ad ambidue i termini della ragione).

Trasponendo in A, e ridotta in Equazione la proporzione B, si ha

$$b = 20 - Q \quad \ldots A$$

$$25x\,b - 150\,b = x^2Q - 25xQ + 150Q \quad \ldots B$$

Moltiplicando l'Equaz.e A per $25x - 150$ diviene

$$25x\,b - 150\,b = 500x - 3000 - 25xQ + 150Q \quad \ldots A$$

Sostituito il valore di A in B, risulta:

$$500x - 3000 - 25xQ + 150Q = x^2Q - 25xQ + 150Q$$

Trasponendo ... $x^2Q = 500x - 3000$

E dividendo $Q = \frac{500x - 3000}{x^2}$ quantità dell'acqua che deve uscire nella terza estrazione

Ma;

Perciò $R = \frac{20x^2 - 500x + 3000}{x^2}$

Ora dal secondo residuo del vino rimasto nella Botte sottratta la porzione del vino or ritrovata, si ha

$$\frac{x^2 - 25x + 150}{x} - \frac{20x^2 - 500x + 3000}{x^2}$$

Cioè riducendo alla stessa denominazione

$$\frac{x^4 - 25x^3 + 150x^2 - 20x^3 + 500x^2 - 3000x}{x^3}$$

Ossia $$\frac{x^4 - 45x^3 + 650x^2 - 3000x}{x^3}$$

Questa è la quantità del vino che rimane nella Botte dopo la terza astrazione.

Sottraggasi di nuovo la porzione sopra ritrovata dall'acqua unita dall'acqua infusa nella seconda rimanenza, e si avrà:

$$\frac{25x - 150}{x} - \frac{500x - 3000}{x^2}$$

Riducendo alla medesima denominazione diviene

$$\frac{25x^3 - 150x^2 - 500x^2 + 3000x}{x^3}$$

Aggiunta a questa quantità le 20 misure di acqua, risulta

$$\frac{25x^3 - 150x^2 - 500x^2 + 3000x}{x^3} + 20$$

Cioè riducendo sotto il medesimo denominatore

$$\frac{25x^3 - 150x^2 - 500x^2 + 3000x + 20x^3}{x^3}$$

Ovvero $$\frac{45x^3 - 650x^2 + 3000x}{x^3}$$

E questa è la quantità dell'acqua dopo l'ultima infusione delle predette 20 misure di acqua.

Paragonando ora il vino rimasto nella Botte, e l'acqua in esso nella stessa Botte alla quantità in ragione di 5 a 7 risultano le seguenti Equazioni:

$$\frac{x^4 - 45x^3 + 650x^2 - 3000x}{x^3} = \frac{5x}{12}$$

$$\frac{45x^3 - 650x^2 + 3000x}{x^3} = \frac{7x}{12}$$

Cioè

Cioè levate le frazioni.

$$12x^4-540x^3+7800x^2-36000x=5x^4$$

$$540x^3-7800x^2+36000x==7x^4$$

Trasponendo, e ordinando diverranno

$$7x^4-540x^3+7800x^2-36000x=0$$

$$7x^4-540x^3+7800x^2-36000x=0$$

Dividendo l'una, o l'altra Equazione per x, si ha

$$7x^3-540x^2+7800x-36000=0$$

E liberando la massima incognita dal coefficiente, diviene

$$x^3-\frac{540x^2}{7}+\frac{7800x}{7}-\frac{36000}{7}=0$$

Risoluzione.

Fatto $7x=y$ si moltiplichi per $1, 7, 49, 343$.

E si avrà $y^3-540y^2+54600y-1764000=0$

Volendo risolverla pel metodo generale, si deve togliere il secondo termine, che sarà posto $y=z+\frac{540}{3}=z+180$ essa si trasforma nella seguente:

$$z^3 * -42600z-3600000=0$$

Fatto $z=10u$, dividasi per $1, 10, 100, 1000$

Risulterà $u^3 * -426u-3600=0$

Ora se sottraendo il coefficiente 426 da qualche quadrato, come da 441, il residuo 15 misura esattamente l'omogeneo, e il quoto 240 sostituito invece di u nell'equazione faccia svanire i termini, sarà 240 radice della medesima equazione; e poichè non svaniscono, sottraggasi 426 da qualche altro quadrato, come da 576, e pel residuo 150 si divida l'omogeneo 3600, il quoto 24 riduce i termini al zero; perciò 24 è

è uguale ad u. ma z (per costruz.) è doppia di u, perciò $z = 240$; y poi $= z + 180$: laonde $y = 240 + 180 = 420$, ed essendo $x = \frac{1}{7} y$ ovvero $x = \frac{420}{7} = 60$, che è una delle tre radici dell'Equazione.

Perchè poi divisa la data Equazione per $x - 60$ si riduce alla quadratica, la cui radici sono immaginarie, sarà 60 la quantità ricercata.

Problema decimo 3zo

Quattro Mercanti posero in società 220. Piastre d'oro, il primo lasciò a traffico il suo capitale per 1. anno, il secondo per 2. anni il 3zo per 4 e il 4to per 5; e li capitali con li suoi frutti ascesero a Piastre 388. Infine del termine, fatta la divisione, toccò al primo tra capitale e guadagno Piastre 24, al 2do 56, al terzo 108; al 4to 200. Si cerca il Capitale di ciascheduno.

Sia x il capitale del primo del secondo y, del terzo z perciò sarà il capitale del 4to $220 - x - y - z$

Capitale composto del primo nel suo tempo $= x$, del 2do $= 2y$; del terzo $= 4z$, del 4to $= 1100 - 5x - 5y - 5z$,

Guadagno del primo $= 24 - x$

del 2do $= 56 - y$

del 3zo $= 108 - z$

del 4to $= x + y + z - 20$

Perchè poi i guadagni devono essere nella ragione dei capitali composti sarà necessario il capitale composto del primo

capitale composto del 2do con il guadagno del primo al guadagno del 2do; e necessariamente il capitale composto del primo al capitale composto del terzo, con il guadagno del primo, al guadagno del terzo, ecc. Laonde si avranno queste tre proporzioni

$$x : 2y :: 24 - x : 56 - y$$

$$x : 4z :: 24 - x : 104 - z$$

$$x : 1100 - 5x - 5y - 5z :: 24 - x : x + y + z - 20$$

Dalla prima si ha l'equazione $56x - xy = 48y - 2xy$ A

Dalla 2da $104x - xz = 96z - 4xz$ B

Dalla 3a: $x^2 + xy + xz - 20x = 26400 - 1220x + 5x^2 - 120y - 120z$
$+ 5xy + 5xz$

Ovvero $4x^2 - 1200x - 120y - 120z + 4xy + 4xz = 26400$ C

Trasponendo in B diviene

$$104x + 3xz = 96z$$

e dividendo per coefficiente di x $x = \frac{96z}{104 + 3z}$

Ovvero $x = \frac{32z}{36 + z}$ B

e sostituendo tal valore in A si ha

$$\frac{1792z}{36 + z} - \frac{32zy}{36 + z} = 48y - \frac{64zy}{36 + z}$$

Ovvero levata la frazione, cioè moltiplicando per $36 + z$ si ha:

$$1792z = 1728y + 48zy - 32zy$$

Ovvero $1792z = 1728y + 16zy$

e dividendo per coefficiente di y

si avrà $y = \frac{1792z}{1728 + 16z}$, ovvero $y = \frac{112z}{108 + z}$ A

Sostituito il valore di B nella terza C diviene

$$\frac{4096z^2}{1296+72z+z^2} - \frac{38400z}{36+z} - 120y - 120z + \frac{128zy}{36+z} + \frac{128z^2}{36+z} = -26400$$

E sostituito il valore di y

$$\frac{4096z^2}{1296+72z+z^2} - \frac{38400z}{36+z} - \frac{13440z}{108+z} - 120z + \frac{14336z^2}{3888+144z+z^2}$$
$$+ \frac{128z^2}{36+z} = -26400$$

Ovvero riducendo tutti i termini sotto i divisori $1296+72z+z^2$, e $3888+144z+z^2$, si avrà

$$\frac{4096z^2 - 1382400z - 38400z^2 + 4608z^2 + 128z^3 - 155520z - 8640z^2 - 120z^3 + 34214400 + 1900800z + 26400z^2}{1296+72z+z^2} -$$
$$- \frac{483840z - 13440z^2 + 14336z^2}{3888+144z+z^2} = 0$$

Ovvero riducendo

$$\frac{-11936z^2 + 362880z + 8z^3 + 34214400}{1296+72z+z^2} - \frac{483840z + 896z^2}{3888+144z+z^2} = 0$$

E moltiplicando i termini per i due divisori composti, diverrà:

$$-46407168z^2 - 1718784z^3 - 11936z^4 + 1410877440z$$
$$+ 52254720z^2 + 362880z^3 + 31104z^3 + 1152z^4 + 8z^5 +$$
$$+ 133025587200 + 4926873600z + 34214400z^2 -$$
$$- 627056640z - 34836480z^2 - 483840z^3 + 1161216z^2$$
$$+ 64512z^3 + 896z^4 = 0$$

Ovvero riducendo

$$+6386688z^2 - 1744128z^3 - 9888z^4 + 5710694400z +$$
$$+ 8z^5 + 133025587200 = 0$$

Ordinando i termini, e dividendo per 8 coefficiente della massima incognita, risulta:

$$z^5 - 1236z^4 - 218016z^3 + 798336z^2 + 713836800z + 16628198400 = 0$$

Equazione cercata.

Risoluzione.

Per ridurla a termini più semplici, si divida per $\div$ 1, 2, 4, 8, 16, 32, fatto $z = 2r$, e diverrà

$$r^5 - 618r^4 - 54504r^3 + 99792r^2 + 44614800r + 519631200 = 0$$

Dividendo di nuovo le radici per 6, cioè per $\div$ 1, 6, 36, 216, 1296, 7776, fatto $r = 6u$, diverrà

$$u^5 - 103u^4 - 1514u^3 + 462u^2 + 34425u + 66825 = 0,$$ che non è ulteriormente riducibile.

Si sostituiscano i divisori omogenei 1, 3, 5 ecc., e uno: che sostituito 5, svaniscono i termini, sarà $u = 5$. Dunque r, che è sestuplo di u sarà $= 30$; e però z che è doppio di r, sarà uguale a 60

Il capitale dunque del terzo compagno aumentato per z è l'altra 60 donde si ritrova che il capitale del primo aumentato per x è uguale a 20; e il capitale del 2do aumentato per $y = 40$; e però il capitale del 4to $= 100$, la cui somma uguaglia la data quantità 220.

…TALIA - 30 luglio 1883 3289

… in quella …

e si ha per ultimo residuo zero. Laonde 2 è la seconda cifra radicale, e 30+2, cioè 32, la radice cercata, come in figura.

Formula algebraica $aa + 2ab + bb$

Quadrato proposto 10.24 (Radice $a+b$ = 3 2

aa	=	9
$2ab$	=	12
$2a$	=	6
$2ab$	=	12
bb	=	04
bb	=	4
		0

Nota. Se si moltiplichi in se stesso il trinomio $a+b+c$, e si conosceranno i di lui elementi, si potrà dedurre la regola ond'estrarre la radice quadrata trinomia: ma poichè la formula $aa+2ab+bb$ del binomio è sufficiente per estrarre qualunque radice, se per cavare una nuova cifra radicale, si considerino le

Centimetres 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
Inches 1 2 3 4 5 6 7
Color chart
Sachverständigen-Zubehör.de
Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White Grey Black